فصل ۵

انتگرال

بخش ۱.۵ تعریف انتگرال

۱.۵ تعریف. تابع $F(x)$ را یک تابع اولیه برای $f(x)$ می‌نامند هرگاه $F'(x) = f(x)$ گردد و می‌گویند که

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

که در آن $\int$ حرف اول از کلمه‌ی انگلیسی *sum* به معنی مجموع است و همچنین ثابت C که درجواب انتگرال نامعین[۱] می‌آید با گرفتن مشتق از تابع اولیه‌ی $F(x)+C$ از بین خواهد رفت و درنتیجه $(F(x)+C)' = f(x)$ خواهد بود.

۲.۵ مثال. انتگرال های زیر را حل کنید؟

$$\begin{cases} \int 2xdx = x^2 + C \\ (x^2 + C)' = 2x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \int \cos xdx = \sin x + C \\ (\sin x + C)' = \cos x \end{cases}$$

[۱] انتگرال نامعین انتگرالی است که حدود ندارد.

$$\begin{cases} \int 3x^2 dx = x^3 + C \\ (x^3 + C)' = 3x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \int e^x dx = e^x + C \\ (e^x + C)' = e^x \end{cases}$$

بخش ۲.۵ انتگرال معین و نامعین

اگر بازه‌ی انتگرال گیری مشخص شده باشد در اینصورت انتگرال معین خواهیم داشت که در واقع برابر با یک مقدار خواهد بود یعنی اگر

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

آنگاه انتگرال معین آن روی بازه‌ی $[a,b]$ برابر است با

$$\int_a^b f(x)dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

۱.۲.۵ فرمول های انتگرال گیری

۳.۵ نکته. انتگرال نامعین دارای خاصیت خطی می‌باشد، به این معنی که اگر $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع انتگرال پذیر و $\lambda \in R$ باشد، آنگاه

$$\int \Big(\lambda f(x) + g(x)\Big)dx = \lambda \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

فرمول‌های انتگرال گیری که در واقع عکس حالت مشتق گیری است به صورت زیر می‌باشد:

۱)

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$$

۲)

$$\int \sin(ax)dx = \frac{-1}{a}\cos(ax) + C$$
$$\int \sin(2x)dx = \frac{-1}{2}\cos(2x) + C$$

۳)

$$\int \cos(ax)dx = \frac{1}{a}\sin(ax) + C$$
$$\int \cos(x)dx = \sin(x) + C$$

۴)

$$\int \tan x dx = -\ln|\cos x|$$

۵)

$$\int \cot x dx = \ln|\sin x|$$

۶)

$$\int e^{nx}dx = \frac{1}{n}e^{nx} + C$$
$$\int e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x} + C$$

۷)

$$\int \frac{a}{x}dx = a\ln|x| + C$$
$$\int \frac{2}{x}dx = 2\ln|x| + C$$

۴.۵ مثال. انتگرال های زیر را بیابید؟

$$\int (2x^3 + \sin 3x)dx = 2\int x^3 dx + \int \sin(3x)dx$$
$$= \frac{2x^4}{4} - \frac{\cos 3x}{3} + C$$

$$\int (x^2 + \cos x + 1)dx = \frac{x^3}{3} + \sin x + x + C$$

بخش ۳.۵ روش‌های انتگرال گیری

۱.۳.۵ روش تغیر متغیر

در این روش ما تابعی جدید چون $u(x)$ را در نظر می‌گیریم و با مشتق گیری از این تابع بر حسب x به عبارت $du = u'(x)dx$ می‌رسیم:

۵.۵ مثال. انتگرال زیر را حساب کنید؟

$$\int \cos(3x-1)dx$$

ابتدا تابع $u(x)$ را بصورت زیر در نظر می‌گیریم :

$$\begin{cases} u(x) = 3x-1 \\ du = 3dx \\ \frac{1}{3}du = dx \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int \cos(3x-1)dx &= \int \frac{\cos u}{3}du = \frac{1}{3}\int \cos u du \\ &= \frac{1}{3}\sin u + C = \frac{1}{3}\sin(3x-1) + C \end{aligned}$$

۶.۵ مثال. انتگرال زیر را حساب کنید؟

$$\int (2x-4)^2 dx$$

تابع $u(x)$ را بصورت زیر در نظر می‌گیریم :

$$\begin{cases} u(x) = 2x-4 \\ du = 2dx \\ \frac{1}{2}du = dx \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int (2x-4)^2 dx &= \int u^2 . \frac{1}{2}du = \frac{1}{2}\int u^2 du \\ &= \frac{1}{2}.\frac{u^3}{3} + C = \frac{u^3}{6} + C \\ &= \frac{(2x-4)^3}{6} + C \end{aligned}$$

۲.۳.۵ روش انتگرال گیری جزء به جزء

فرمول روش انتگرال گیری جزء به جزء با استفاده از قاعده‌ی مشتق حاصلضرب دو تابع و انتگرال‌گیری بصورت زیر ساخته می‌شود:

$$\left(fg\right)' = f'g + fg'$$

حال از طرفین تساوی بالا انتگرال گیری می‌کنیم:

$$\int (fg)' = \int f'g + \int fg'$$

می‌دانیم که $\int F' = F$ است بنابراین می‌توان $fg = \int (fg)'$ را در تساوی بالا جایگذاری نمود که :

$$fg = \int fg' + \int f'g$$

و در نتیجه داریم:

$$\int fg' = fg - \int f'g$$

که فرمول انتگرال گیری جز به جز می‌باشد.

۷.۵ مثال. انتگرال های زیر را محاسبه کنید؟

۱)

$$\int x \sin x dx$$

حل: با توجه به فرمول انتگرال گیری جز به جز داریم

$$\begin{cases} f = x \quad , \quad g' = \sin x dx \\ f' = dx \quad , \quad g = -\cos x \end{cases}$$

که بنابراین:

$$\begin{aligned} \int x \sin x dx &= -x\cos x - \int -\cos x dx \\ &= -x\cos x + \sin x + C \end{aligned}$$

۲)

$$\int \ln x dx$$

حل: با توجه به فرمول انتگرال گیری جز به جز داریم

$$\begin{cases} f = \ln x & , \quad g' = dx \\ f' = \dfrac{dx}{x} & , \quad g = x \end{cases}$$

که بنابراین:

$$\begin{aligned} \int \ln x dx &= x \ln x - \int x.\frac{dx}{x} \\ &= x \ln x - \int dx \\ &= x \ln x - x + C \end{aligned}$$

۳)

$$\int x^2 \cos x dx$$

حل: با توجه به فرمول انتگرال گیری جز به جز داریم

$$\begin{cases} f = x^2 & , \quad g' = \cos x dx \\ f' = 2x dx & , \quad g = \sin x \end{cases}$$

که بنابراین:

$$\int x^2 \cos x dx = x^2 \sin x - \int 2x.\sin x dx$$

که در اینجا برای بدست آوردن $\int 2x.\sin x dx$ بطور مجدد از روش انتگرال گیری جز به جز استفاده می‌کنیم:

$$\int 2x.\sin x dx$$

$$\begin{cases} f = 2x \quad , \quad g' = \sin x \\ f' = 2dx \quad , \quad g = -\cos x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int 2x\sin x dx &= -2x\cos x - \int -2\cos x dx \\ &= -2x\cos x + 2\int \cos x dx \\ &= -2x\cos x + 2\sin x + C \end{aligned}$$

که در نتیجه با قرار دادن $\int 2x\sin x dx$ در فرمول ابتدائی خواهیم داشت:

$$\int x^2\cos x dx = x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C$$

۴)

$$\int xe^x dx$$

حل: با توجه به فرمول انتگرال گیری جز به جز داریم

$$\begin{cases} f = x \quad , \quad g' = e^x dx \\ f' = dx \quad , \quad g = e^x \end{cases}$$

که بنابراین:

$$\begin{aligned} \int xe^x dx &= xe^x - \int e^x dx \\ &= xe^x - e^x + C \end{aligned}$$

۸.۵ تمرین. انتگرال های زیر را محاسبه کنید؟

$$1) \quad \int x\ln x dx$$

$$2) \quad \int x^2 e^x dx$$

۹.۵ نکته. برای محاسبه‌ی برخی از انتگرال‌ها می‌توان از دو رابطه‌ی مثلثاتی

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \qquad , \qquad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

استفاده کرد.

۱۰.۵ مثال. انتگرال‌های زیر را حساب کنید؟

۱)

$$\int \sin^2(x)dx$$

حل:

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x dx &= \int \frac{1-\cos 2x}{2}dx \\ &= \int (\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x)dx \\ &= \int \frac{1}{2}dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x dx \\ &= \frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x + C\end{aligned}$$

۲)

$$\int \cos^2(x)dx$$

حل:

$$\begin{aligned}\int \cos^2 x dx &= \int \frac{1+\cos 2x}{2}dx \\ &= \int \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x\right)dx \\ &= \int \frac{1}{2}dx + \int \frac{1}{2}\cos 2x dx \\ &= \frac{x}{2}+\frac{1}{2}.\frac{1}{2}\sin 2x + C \\ &= \frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}+C\end{aligned}$$

۳)

$$\int \sin^3(x)dx$$

حل:

$$\begin{aligned}\int \sin^3(x)dx &= \int \sin.\sin^2 xdx \\ &= \int \sin x.(1-\cos^2 x)dx\end{aligned}$$

با درنظر گرفتن تغییر متغییر زیر داریم:

$$\begin{cases} u(x) = \cos(x) & \longrightarrow \quad du = -\sin(x)dx \\ -du = \sin(x)dx \end{cases}$$

پس

$$\begin{aligned}\int \sin^3(x)dx = \int \sin\sin^2 xdx = \int \sin x(1-\cos^2 x)dx \\ &= \int -(1-u^2)du \\ &= \int (u^2-1)du \\ &= \frac{u^3}{3} - u + C\end{aligned}$$

و اکنون با قرار دادن $u = \cos(x)$ در جواب داریم

$$\int \sin^3(x)dx = \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + C$$

۱۱.۵ تمرین. انتگرال زیر را حل کنید؟

$$\int \cos^3 xdx$$

۱۲.۵ مثال. انتگرال‌های زیر را (با استفاده‌ی از جدول تغییر متغییر) حل کنید؟

۱)

$$\int x^2 \sin x dx$$

حل: ابتدا جدول زیر را برای سادگی کار در نظر میگیریم

انتگرال	مشتق	علامت
$-\cos x$	x^2	+
$-\sin x$	$2x$	−
$\cos x$	2	+

و اکنون عبارت‌های موجود در هر سطر را با یکدیگر ضرب کرده و مجموع آن عبارت‌ها جواب این انتگرال خواهد بود

$$\int x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x + C$$

۲)

$$\int x^2 e^x dx$$

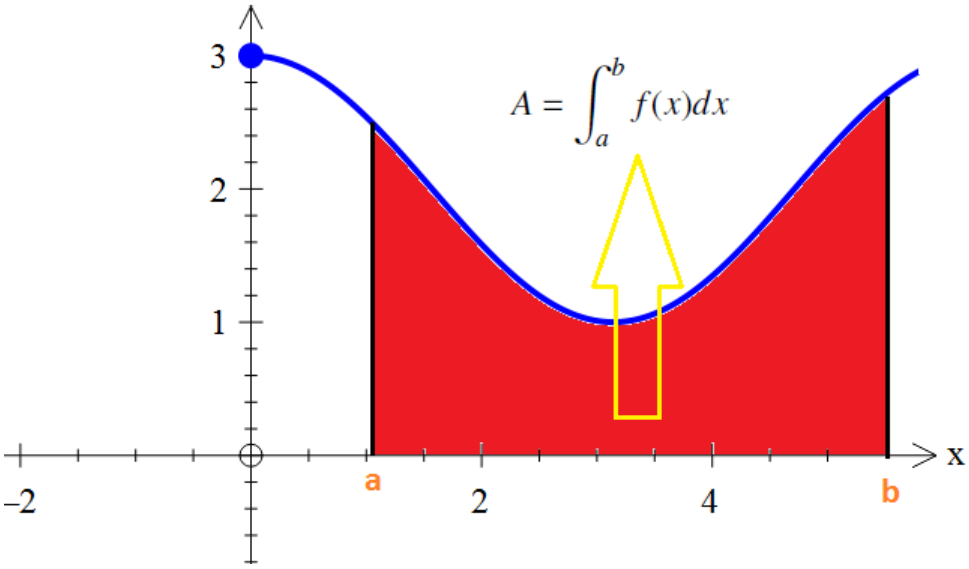
حل:

ابتدا جدول زیر را برای سادگی کار در نظر میگیریم

انتگرال	مشتق	علامت
e^x	x^2	+
e^x	$2x$	−
e^x	2	+

و اکنون عبارت‌های موجود در هر سطر را با یکدیگر ضرب کرده و مجموع آن عبارت‌ها جواب این انتگرال خواهد بود

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C$$



شکل ۱.۵: مساحت بین نمودار تابع $y = f(x)$ و محور xها که از $x = a$ تا $x = b$ بوده و برابر با $A = \int_a^b f(x)dx$ است.

بخش ۴.۵ کاربرد انتگرال

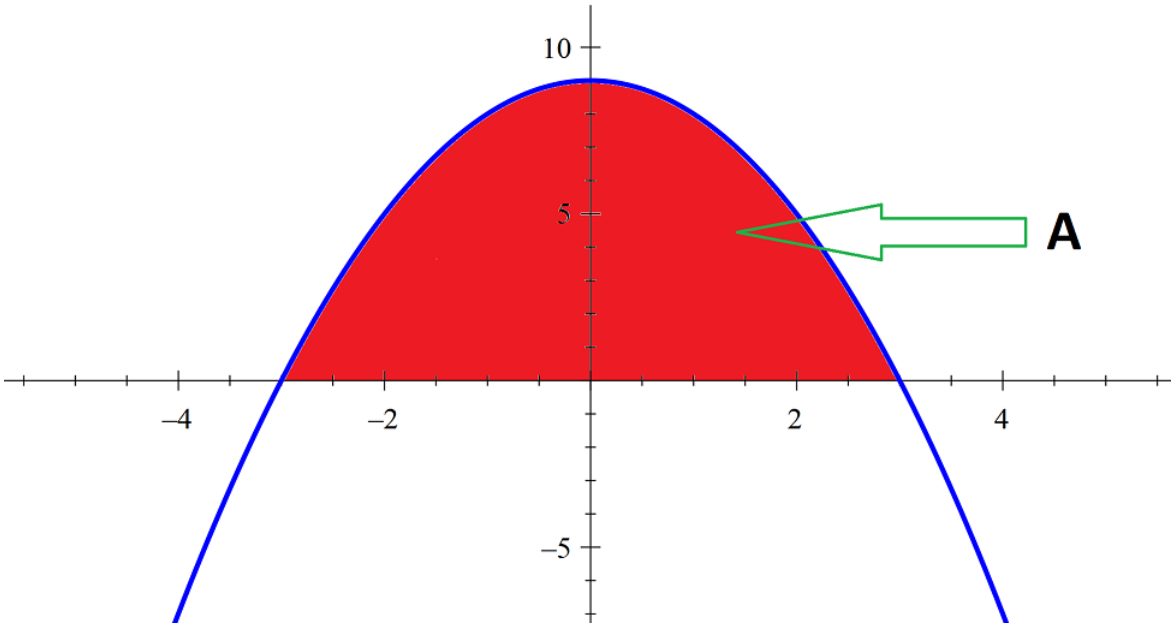
۱.۴.۵ مساحت

در واقع مقدار انتگرال معین $\int_a^b f(x)dx$ سطح محصور بین منحنی $y = f(x)$ و محور xها را به ما می‌دهد.

۱۳.۵ مثال. سطح محصور بین منحنی $y = f(x) = 2x + 1$ و محور xها و خطوط $x = 0$ و $x = 2$ را پیدا کنید؟

$$\begin{aligned} A &= \int_0^2 f(x)dx \\ &= \int_0^2 (2x+1)dx \\ &= \left[x^2 + x\right]_0^2 \\ &= [(2)^2 + (2)] - [(0)^2 + 0] = 6 \end{aligned}$$

۱۴.۵ مثال. سطح محصور بین منحنی $y = 9 - x^2$ و محور xها را بیابید؟



شکل ۲.۵: سطح زیر نمودار $y = 9 - x^2$ و محور xها.

حل: ابتدا نقاطی که در آن منحنی محور xها را قطع می‌نماید، مشخص می‌کنیم:

$$\begin{cases} 9 - x^2 = 0 \quad \longrightarrow \quad x^2 = 9 \quad \longrightarrow \quad x = \pm 3 \\ x = 3 \\ x = -3 \end{cases}$$

که با درنظر گرفتن بازه‌ی $[-3, 3]$ بعنوان حدود انتگرال گیری داریم:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-3}^{3} (9 - x^2) dx \\ &= \left[9x - \frac{x^3}{3} \right]_{-3}^{3} \\ &= [9(3) - \frac{(3)^3}{3}] - [9(-3) - \frac{(-3)^3}{3}] \\ &= 36 \end{aligned}$$

۲.۴.۵ حجم

حجم حاصل از دوران تابع $y = f(x)$ حول محور xها در بازه‌ی $[a,b]$ بصورت زیر محاسبه می‌شود:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

۱۵.۵ مثال. حجم حاصل از دوران منحنی $y = \cos x$ حول محور xها و در بازه‌ی $[0, \frac{\pi}{2}]$ را محاسبه کنید؟
حل:

$$y = f(x) = \cos x$$

$$\begin{aligned}
V &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx \\
&= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2x}{2} dx \\
&= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x) dx \\
&= \pi\left(\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x dx\right) \\
&= \pi\left([\frac{x}{2}]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{4}[\sin 2x]_0^{\frac{\pi}{2}}\right) \\
&= \pi\left(\frac{\frac{\pi}{2}}{2} - 0 + \frac{1}{4}[\sin\pi - \sin 0]\right) \\
&= \pi(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi^2}{4}
\end{aligned}$$

۱۶.۵ نکته. حجم حاصل از دوران ناحیه محدود به دو منحنی $y_1 = f(x)$ و $y_2 = g(x)$ حول محور xها و در بازه‌ی $[a,b]$ از رابطه ی

$$V = \pi\left|\int_a^b (f^2(x) - g^2(x)) dx\right|$$

بدست می‌آید.

۱۷.۵ مثال. حجم حاصل از دوران سطح محصور بین منحنی $f(x) = x^2$ و $g(x) = x$ حول محور xها را بیابید؟
حل:
ابتدا بازه‌ی انتگرال گیری را مشخص می‌کنیم، یعنی

$$\begin{cases} ax^2+bx+c=0 \quad \longrightarrow \quad \Delta=b^2-4ac \quad \longrightarrow \quad x=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} \\ x=x^2 \quad \longrightarrow \quad x^2-x=0 \quad \longrightarrow \quad \Delta=(-1)^2-4(1)(0)=1 \end{cases}$$

پس

$$x=\frac{1\pm 1}{2}=\begin{cases} \dfrac{1+1}{2}=\dfrac{2}{2}=1 \\ \dfrac{1-1}{2}=\dfrac{0}{2}=0 \end{cases}$$

بنابراین بازه‌ی مورد نظر برابر با $[a,b]=[0,1]$ است و حجم حاصل طبق فرمول بالا برابر با

$$\begin{aligned} V&=\pi\left|\int_a^b (f^2(x)-g^2(x))dx\right| \\ &=\pi\left|\int_0^1 (x^4-x^2)dx\right| \end{aligned}$$

و از آنجایی که مقدار انتگرال داخل قدر مطلق برابر با

$$\begin{aligned} \int_0^1 (x^4-x^2)dx &= \left[\frac{x^5}{5}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1 \\ &= \left[(\frac{1}{5}-\frac{1}{3})-0\right] \\ &= \frac{3-5}{15} \\ &= -\frac{2}{15} \end{aligned}$$

در نتیجه حجم حاصل از دوران برابر با مقدار زیر می‌باشد:

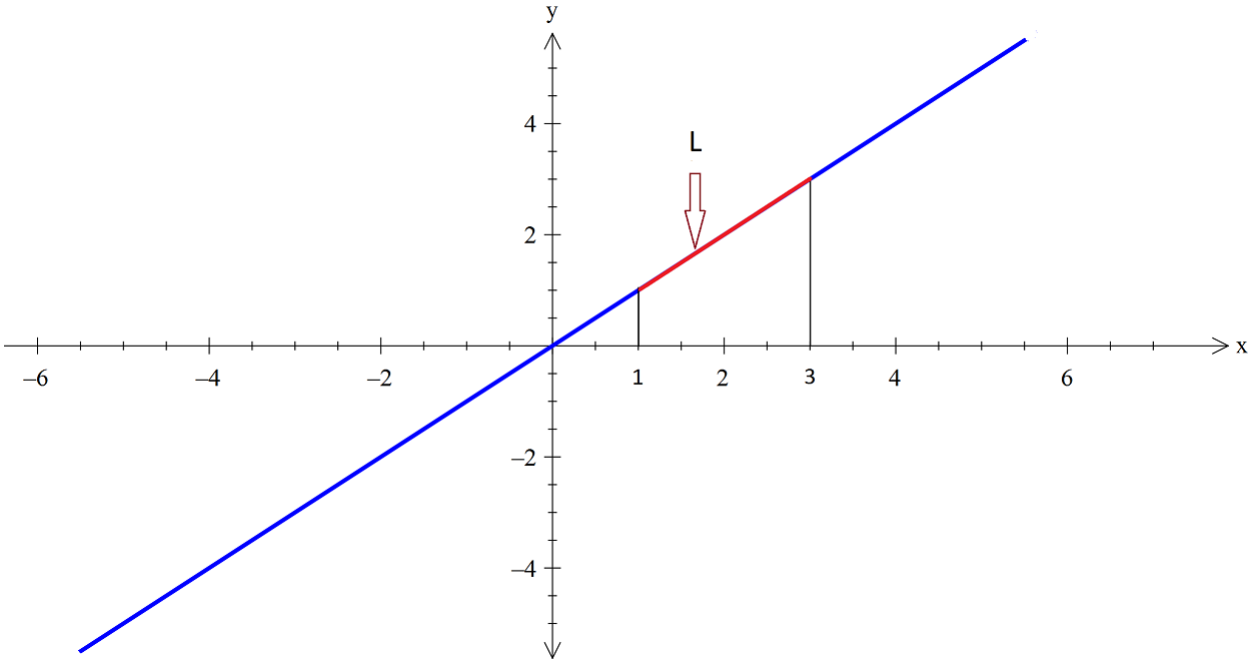
$$V=\pi\left|-\frac{2}{15}\right|=\frac{2\pi}{15}$$

۳.۴.۵ طول منحنی

محاسبه طول قوس منحنی:

برای تابع $y=f(x)$ که روی بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته و در بازه‌ی (a,b) مشتق پذیر باشد، طول منحنی $f(x)$ در بازه‌ی $[a,b]$ برابر است با

$$L=\int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}dx$$



شکل ۳.۵: طول منحنی $f(x) = x$ روی بازه‌ی $[1,3]$.

۱۸.۵ مثال. طول منحنی $f(x) = x$ را روی بازه‌ی $[1,3]$ محاسبه کنید؟

حل:

$$f'(x) = 1 \quad \longrightarrow \quad L = \int_1^3 \sqrt{1+[1]^2}dx$$

$$\begin{aligned} L &= \int_1^3 \sqrt{1+[1]^2}dx \\ &= \int_1^3 \sqrt{2}dx = \left[\sqrt{2}x\right]_1^3 \\ &= \sqrt{2}(3-1) \\ &= 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

۱۹.۵ مثال. طول منحنی $y = f(x) = x\sqrt{x}$ را در فاصله‌ی $[0,2]$ محاسبه کنید؟

حل: ابتدا مقدار $[f'(x)]^2$ را محاسبه می کنیم:

$$\begin{cases} f(x) = x\sqrt{x} = \sqrt{x^2.x} = \sqrt{x^3} = x^{\frac{3}{2}} \\ f'(x) = \frac{3}{2}x^{(\frac{3}{2}-1)} = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{x} \\ [f'(x)]^2 = \frac{9}{4}x \end{cases}$$

و مطابق با فرمول طول قوس منحنی مقدار L برابر است با

$$L = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}dx = \int_0^4 \sqrt{1+\frac{9}{4}x}dx$$

که به منظور یافتن انتگرال (یا تابع اولیه‌ی) مورد نظر با استفاده از روش تغییر متغییر داریم

$$L = \int_0^4 \sqrt{(1+\frac{9}{4}x)}dx$$

که ابتدا می‌بایستی انتگرال نامعین زیر را حساب کنیم

$$\int \sqrt{(1+\frac{9}{4}x)}dx$$

$$\begin{cases} u = 1+\frac{9}{4}x \\ du = \frac{9}{4}dx \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int \sqrt{(1+\frac{9}{4}x)}dx &= \int \sqrt{u}(\frac{4}{9})du \\ &= \frac{4}{9}\int \sqrt{u}du = \frac{4}{9}\int u^{\frac{1}{2}}du \\ &= \frac{4}{9}.\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{9}.\frac{2}{3}\sqrt{u^3} \\ &= \frac{8}{27}\sqrt{(1+\frac{9}{4}x)^3} \end{aligned}$$

پس مقدار طول منحنی در بازه‌ی $[0,2]$ برابر است با

$$\begin{aligned} L &= \left[\frac{8}{27}\sqrt{(1+\frac{9}{4}x)^3}\right]_0^4 \\ &= \frac{8}{27}\left[\sqrt{(1+9)^3} - \sqrt{(1)^3}\right] \\ &= \frac{8}{27}(31.6-1) \\ &\simeq 9 \end{aligned}$$