# فصل ۱

# تابع

## بخش ۱.۱ تابع

**۱.۱ تعریف.** به هر دوتایی $(x,y)$ یک **زوج مرتب** گفته می‌شود، که در آن $x$ مولفه‌ی اول و $y$ مولفه‌ی دوم می‌باشد.

**۲.۱ تعریف(تابع).** به مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب که درآن هیچ دو زوجی دارای مولفه‌ی اول برابر نباشند و اگر مولفه‌ی اول آن‌ها با یکدیگر برابر گردد آن‌گاه مولفه‌ی دوم نیز برابر باشد **تابع** می‌گویند.

**۳.۱ مثال.**

$$A = \{(1,2),(2,5),(-1,3)\}$$
$$B = \{(2,4),(-1,4),(2,3)\}$$

در این مثال $A$ یک تابع است و $B$ تابع نیست، زیرا در $B$ دو زوج مرتب $(2,4)$ و $(2,3)$ دارای مولفه‌ی اول برابر و مولفه‌ی دوم متفاوت هستند.

**۴.۱ نکته.** هر تابع را می‌توان بصورت $y = f(x)$ نیز تعریف نمود که در آن به ازای هر عنصر ورودی $x$ تنها یک عنصر $y$ از آن خارج می‌گردد.

**۵.۱ مثال.**

۱. $f(x) = x^2$

۲. $f(x) = \pm\sqrt{x}$

۱ تابع است و ۲ تابع نیست.

**۶.۱ مثال.** برای تابع $f(x) = \sqrt{x-2}$ داریم

$$f(2) = \sqrt{2-2} = 0$$

$$f(5) = \sqrt{5-2} = \sqrt{3}$$

**۷.۱ مثال.** فرض می‌کنیم که $f(x) = x^2 + 3x - 1$ باشد، مقادیر تابع $f$ را در نقاط 2، 3 و $-1$ بیابید؟

$$f(2) = (2)^2 + 3(2) - 1 = 4 + 6 - 1 = 9$$

$$f(3) = (3)^2 + 3(3) - 1 = 9 + 9 - 1 = 17$$

$$f(-1) = (-1)^2 + 3(-1) - 1 = 1 - 3 - 1 = -3$$

**۸.۱ مثال.** مقادیر توابع مثلثاتی زیر را در نقاط $\frac{\pi}{4}$ ، $\pi$ بدست آورید.

الف) $f(x) = \sin(x)$

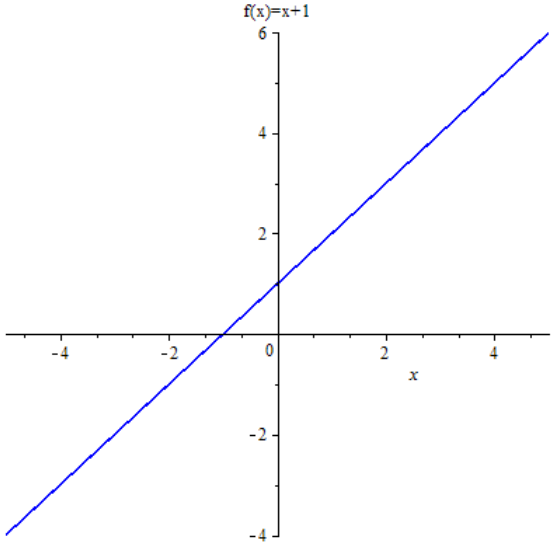
$f(\pi) = 0$ ، $f(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

ب) $g(x) = \tan(x)$

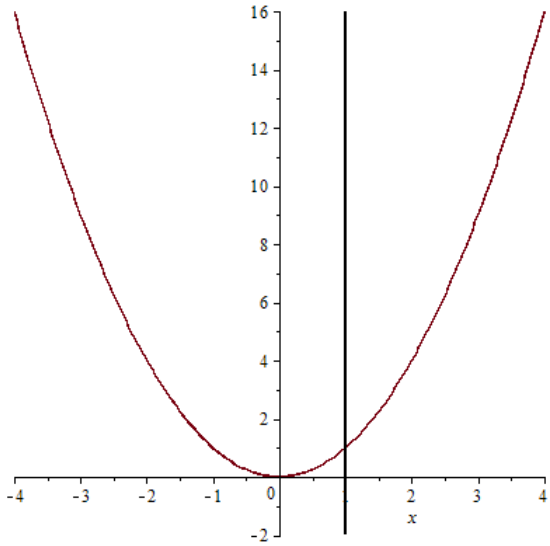
$g(\pi) = 0$ ، $g(\frac{\pi}{4}) = 1$

ما می‌توانیم هر تابع $y = f(x)$ را به صورت یک نمودار در دستگاه مختصات نمایش دهیم.

**۹.۱ نکته(نحوه تشخیص تابع از روی نمودار).** اگر هر خط موازی محور $y$ها نمودار $f(x)$ را در حداکثر یک نقطه قطع کند، آن‌گاه $f(x)$ یک تابع است؛ و اگر خط قائمی پیدا شود که نمودار $f(x)$ را در بیش از یک نقطه قطع کند آنگاه $f(x)$ تابع نخواهد بود.




شکل ۱.۱: نمودار تابع $y = x + 1$




شکل ۲.۱: نمودار $y = x^2$ توسط خطوط موازی محور عرض‌ها حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند.

### ۱.۱.۱ دامنه و برد تابع

**۱۰.۱ تعریف.** به مجموعه‌ی همه‌ی مولفه‌های اول از تابع $f$ یا به مجموعه‌ی همه‌ی $x$ هایی که به ازای آن‌ها تابع $f(x)$ موجود است، **دامنه تابع** $f$ گفته و آن را با $D_f$ نمایش می‌دهند.

**۱۱.۱ مثال.**

الف) $f(x) = x^2 + 1$ $\qquad D_f = \mathbb{R}$

ب) $f(x) = \frac{2x}{x-1}$ $\qquad D_f = \mathbb{R} - \{1\}$

ج) $f(x) = \sqrt{x-2}$ $\qquad D_f = [2, +\infty]$

د) $f(x) = \sin$ $\qquad D_f = \mathbb{R}$

**۱۲.۱ تعریف.** مجموعه‌ی همه‌ی مولفه‌های دوم از تابع $f$ یا مجموعه‌ی همه مقادیر حاصل از قراردادن $x$ های متعلق به دامنه‌ی تابع در $f(x)$ را ، **برد تابع** $f$ گفته و با $R_f$ نمایش می‌دهیم.

**۱۳.۱ مثال.** اگر $f(x) = 2x + 1$، و $D_f = \{1, 2, 3, 4\}$ باشد، در این صورت برد تابع $f$ $(R_f)$ را تعیین کنید؟

$$\begin{aligned} f(1) &= 2(1) + 1 = 3 \\ f(2) &= 2(2) + 1 = 5 \\ f(3) &= 2(3) + 1 = 7 \\ f(4) &= 2(4) + 1 = 9 \end{aligned}$$

در این صورت

$$R_f = \{3, 5, 7, 9\}$$

**۱۴.۱ مثال.** برد توابع زیر را بیابید.

الف) $f(x) = x^3$ $\qquad R_f = \mathbb{R}$

ب) $f(x) = \sqrt{x-1}$ $\qquad R_f = \mathbb{R}^+$

ج) $f(x) = [x]$ $\qquad R_f = \mathbb{Z}$

**۱۵.۱ مثال.** برد تابع باضابطه‌ی $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ را بیابید؟

### ۲.۱.۱ انواع تابع

**تابع چندضابطه‌ای**

بطور نمونه تابع

$$f(x) = \begin{cases} -x & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$$

یک تابع دو ضابطه‌ای می‌باشد.
و یا اینکه تابع

$$h(x) = \begin{cases} -2x+1 & x < 1 \\ 0 & x = 1 \\ x^2 - 1 & x > 1 \end{cases}$$

یک تابع سه ضابطه‌ای است.

**تابع ثابت**

تابع ثابت بصورت $f(x) = C$ تعریف می‌گردد که $C$ یک عدد حقیقی است و به ازای هر مقدار ورودی $x$ خروجی تابع $f$ مقدار $C$ خواهد بود، یعنی تابع ثابت به‌ازای هر مقدار ورودی تنها یک خروجی دارد.

**۱۶.۱ مثال.** برخی از توابع ثابت عبارتند از

$$f(x) = 2$$
$$g(x) = \sqrt{3}$$
$$h(x) = -5$$

**تابع همانی**

تابع همانی تابعی است که به ازای هر متغییر ورودی $x$ خروجی تابع همان عنصر $x$ خواهد بود، یعنی

$$f(x) = x$$

**توابع مثلثاتی**

توابع مثلثاتی به توابعی گفته می‌شود که شامل $sin$ ، $cos$ ، $tan$ یا $cot$ گردند.

**۱۷.۱ مثال.**

الف) $f(x) = \sin(x)$

ب) $h(x) = \tan(x^2 + 1)$

ج) $g(x) = \sin(x) + \cot(x - 1)$

**تابع قدرمطلق**

خاصیتی که تابع قدر مطلق دارد این است که علامت مقدار خروجی را در صورت منفی بودن به مثبت تبدیل می‌کند.

$$|x| = \begin{cases} -x & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$$

**۱۸.۱ مثال.** مقادیر توابع قدرمطلقی زیر را در نقاط 1، 2 و $-2$ محاسبه کنید؟

الف) $f(x) = |x|$

$f(-2) = 2$ ، $f(2) = 2$ ، $f(1) = 1$

ب) $f(x) = |x| + 2$

$f(-2) = 4$ ، $f(2) = 4$ ، $f(1) = 3$

ج) $f(x) = |x - 1|$

$f(-2) = 3$ ، $f(2) = 1$ ، $f(1) = 0$

**۱۹.۱ مثال.**

$$|x| = \begin{cases} -x & ،x < 0 \\ 0 & ،x = 0 \\ x & ،x > 0 \end{cases}$$

**۲۰.۱ مثال.**

$$\frac{|x|}{x} = \begin{cases} -1 & ،x < 0 \\ 1 & ،x > 0 \end{cases}$$

**تابع علامت**

تابع علامت بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$sgn(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

**تابع جزء صحیح**

**۲۱.۱ تعریف.** برای هر عدد دلخواه $x$ از مجموعه‌ی اعداد حقیقی، عددی صحیح مانند $z$ وجود دارد که

$$z \leq x < z+1$$

باشد. که در این صورت $z$ را **جزءصحیح** عدد $x$ نامیده و آن را با $z = [x]$ نمایش می‌دهند. بطور مثال

$$3 \leq 3.5 < 3+1 \qquad \longrightarrow \qquad [3.5] = 3$$

$$-2 \leq -1.5 < -2+1 \qquad \longrightarrow \qquad [-1.5] = -2$$

$$4 \leq 4 < 4+1 \qquad \longrightarrow \qquad [4] = 4$$

**۲۲.۱ مثال.** مقادیر توابع جزء صحیح زیر را در نقطه‌ی $\frac{1}{2}$ بدست آورید؟

الف) $f(x) = [x]+1$

$$f(\frac{1}{2}) = [\frac{1}{2}]+1 = 0+1 = 1 \qquad , \qquad ( \ 0 \leq \frac{1}{2} < 0+1 \ )$$

ب) $g(x) = [x-1]$

$$g(\frac{1}{2}) = [\frac{1}{2}-1] = [-\frac{1}{2}] = -1 \qquad , \qquad ( \ -1 \leq -\frac{1}{2} < -1+1 \ )$$

ج) $h(x) = [\frac{x}{2}+\frac{1}{2}]$

$$h(\frac{1}{2}) = [\frac{\frac{1}{2}}{2}+\frac{1}{2}] = [\frac{1}{4}+\frac{1}{2}] = [\frac{3}{4}] = 0 \qquad , \qquad ( \ 0 \leq \frac{3}{4} < 0+1 \ )$$

### ۳.۱.۱ تابع زوج و فرد

**۲۳.۱ تعریف.** تابع $f(x)$ را یک **تابع زوج** می‌نامیم ، هرگاه $f(-x) = f(x)$ گردد.

**۲۴.۱ تعریف.** تابع $f(x)$ را یک **تابع فرد** می‌نامیم ، هرگاه $f(-x) = -f(x)$ گردد.

**۲۵.۱ مثال.** زوج یا فرد بودن توابع زیر را بررسی کنید؟

الف) $f(x) = x^2$

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x) \qquad \longrightarrow \qquad f(-x) = f(x)$$

ب) $g(x) = -x$

$$g(-x) = -(-x) = x = -g(x) \qquad \longrightarrow \qquad g(-x) = -g(x)$$

ج) $h(x) = x^2 + 1$

$$h(-x) = (-x)^2 + 1 = x^2 + 1 = h(x) \qquad \longrightarrow \qquad h(-x) = h(x)$$

### ۴.۱.۱ تابع نمایی

**۲۶.۱ تعریف.** برای $a > 0$ تابع $f(x) = a^x$ را تابع نمایی می‌نامند که در اینجا ثابت $a \neq 1$ می‌باشد. همچنین می‌توانیم $a$ را برابر با عدد نپر که $e \simeq 2/71$ است فرض کنیم و آن را با $f(x) = e^x = exp(x)$ نمایش بدهیم.

دامنه‌ی یک تابع نمایی کل مجموعه‌ی اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ و برد آن مجموعه‌ی $(0, +\infty)$ می‌باشد.

**۲۷.۱ نکته.** اگر $a > 1$ باشد در این صورت نمودار تابع نمایی صعودی است و درصورتی که $0 < a < 1$ باشد نمودار تابع نزولی خواهد بود.

### ۵.۱.۱ تابع لگاریتمی

**۲۸.۱ تعریف.** تابع لگاریتمی را می‌توان بصورت $y = f(x) = log_a x$ تعریف نمود که در آن $a$ مبنا است و تابع لگاریتمی معادل با $a^y = x$ بوده که در واقع عکس تابع نمایی می‌باشد. همچنین برای تعیین دامنه‌ی یک تابع لگاریتمی می‌بایستی $x > 0$ بوده و مبنای آن $a > 0$ و $a \neq 1$ باشد.

**۲۹.۱ نکته.** در حالتی که $a = e$[1] باشد تابع لگاریتمی را با $Ln$ نمایش می‌دهند و درصورتی که $a = 10$ باشد مبنا را نمی‌نویسند.

**۳۰.۱ مثال.** دامنه‌ی تابع $f(x) = \log_2(x-3)$ را بیابید؟

$$x - 3 > 0 \quad \longrightarrow \quad x > 3 \quad \longrightarrow \quad D_f = (3, +\infty)$$

**۳۱.۱ مثال.** فرض کنید $f(x) = \log_{h(x)} g(x)$ یک تابع لگاریتمی باشد در این صورت

$$D_f = \{x : g(x) > 0, h(x) \neq 1, h(x) > 0\}$$

[1] عدد نپر

### ۶.۱.۱ تابع یک به یک

**۳۲.۱ تعریف.** تابع $f(x)$ را تابع یک به یک می‌نامیم ، هرگاه از $f(x_1) = f(x_2)$، نتیجه شود که $x_1 = x_2$.

**۳۳.۱ مثال.** تابع $f(x) = 2x + 1$ ، تابعی یک به یک است.

$$\begin{aligned} f(x_1) &= f(x_2) \\ 2x_1 + 1 &= 2x_2 + 1 \\ 2x_1 &= 2x_2 \\ x_1 &= x_2 \end{aligned}$$

**۳۴.۱ مثال.** تابع $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ تابعی یک به یک است.

$$\begin{aligned} f(x_1) &= f(x_2) \\ \sqrt[3]{x_1 - 1} &= \sqrt[3]{x_2 - 1} \\ x_1 - 1 &= x_2 - 1 \\ x_1 &= x_2 \end{aligned}$$

**۳۵.۱ نکته.** اگر هر خط موازی محور $x$ ها نمودار تابع $f(x)$ را حداکثر در یک نقطه قطع کند، آن‌گاه تابع $f$ یک به یک می‌باشد؛ و اگر خطی موازی محور $x$ها وجود داشته باشد که نمودار تابع $f(x)$ را در بیش از یک نقطه قطع کند، آنگاه $f(x)$ یک به یک نیست.

### ۷.۱.۱ تابع پوشا

**۳۶.۱ تعریف.** تابع $f : A \longrightarrow B$ را **پوشا** می نامیم، هرگاه $R_f = B$.

**۳۷.۱ مثال.** تابع

$$f(x) = \sin(x) \quad , \quad f : [-\pi, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$$

یک تابع پوشا است.

### ۸.۱.۱ توابع یکنوا

**۳۸.۱ تعریف.** تابع $f(x)$ را یک تابع **صعودی** می‌نامیم هرگاه

$$x_1 \leq x_2 \longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

و تابع $f(x)$ را یک تابع **نزولی** می‌نامیم هرگاه

$$x_1 \leq x_2 \longrightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

**۳۹.۱ مثال.** تابع $f(x) = 2x$ یک تابع صعودی و تابع $f(x) = -x$ یک تابع نزولی است.

### ۹.۱.۱ وارون تابع(تابع معکوس)

**۴۰.۱ تعریف.** **وارون تابع $f$** با تعویض همه‌ی مولفه‌های اول و دوم $f$ بدست می‌آید و آن را با $f^{-1}$ نمایش می‌دهند.

**۴۱.۱ مثال.** فرض کنید

$$f = \{(1,2),(2,3),(-1,3),(2,-4)\}$$

در اینصورت

$$f^{-1} = \{(2,1),(3,2),(3,-1),(-4,2)\}$$

**۴۲.۱ توجه.** شرط لازم و کافی برای وارون پذیر بودن تابع $f$ این است که یک به یک باشد.
برای بدست آوردن وارون یک تابع $y = f(x)$ از روی ضابطه‌ی آن ابتدا جای دو مولفه‌ی $x$ و $y$ را بایکدیگر تعویض می‌کنیم و سپس $y$ را برحسب $x$ بدست می‌آوریم.

**۴۳.۱ مثال.** وارون تابع $y = x + 1$ را بدست آورید.
ابتدا جای دو مولفه‌ی $x$ و $y$ را عوض می‌کنیم.

$$X = Y + 1$$

سپس $Y$ را برحسب $X$ محاسبه خواهیم کرد.

$$X - 1 = Y$$

و در نتیجه

$$y^{-1} = f^{-1}(x) = x - 1$$

**۴۴.۱ مثال.** وارون تابع $y = x^3 - 1$ را بدست آورید.
ابتدا جای دو مولفه‌ی $x$ و $y$ را عوض می‌کنیم.

$$X = Y^3 - 1$$

سپس $Y$ را برحسب $X$ محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} Y^3 - 1 &= X \\ Y^3 &= X + 1 \\ Y &= \sqrt[3]{X+1} \end{aligned}$$

بنابراین:

$$f^{-1}(x) = y^{-1} = \sqrt[3]{x+1}$$

## بخش ۲.۱ اعمال روی توابع

برای دو تابع $f$ و $g$ که با دامنه‌های $D_f$ و $D_g$ باشند؛ جمع ، تفاضل ، ضرب و تقسیم دو تابع بصورت زیر تعریف می‌شوند:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \qquad , \quad D_{f+g} = D_f \cap D_g$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) \qquad , \quad D_{f-g} = D_f \cap D_g$$

$$(fg)(x) = f(x).g(x) \qquad , \quad D_{fg} = D_f \cap D_g$$

$$(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \qquad , \quad D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\}$$

**۴۵.۱ مثال.** فرض کنید $f(x) = x^2$ و $g(x) = \sqrt{x-1}$ باشند، در این صورت ضابطه و دامنه‌ی توابع $f+g$ ، $f-g$ ، $f.g$ و $\frac{f}{g}$ را بدست آورید؟

$$f(x) = x^2 \qquad \longrightarrow \qquad D_f = \mathbb{R}$$

$$g(x) = \sqrt{x-1} \qquad \longrightarrow \qquad x - 1 \geq 0 \qquad \longrightarrow \qquad x \geq 1$$

پس

$$D_g = [1, +\infty)$$

اکنون داریم:

$$(f+g)(x) = x^2 + \sqrt{x-1} \qquad D_{f+g} = [1,+\infty)\cap\mathbb{R} = [1,+\infty)$$

$$(f-g)(x) = x^2 - \sqrt{x-1} \qquad D_{f-g} = [1,+\infty)\cap\mathbb{R} = [1,+\infty)$$

$$(f.g)(x) = x^2\sqrt{x-1} \qquad D_{f-g} = [1,+\infty)\cap\mathbb{R} = [1,+\infty)$$

$$(\frac{f}{g})(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x-1}}$$

$$D_{\frac{f}{g}} = [1,+\infty)\cap\mathbb{R} - \left\{x \mid \sqrt{x-1} = 0\right\} = [1,+\infty)\cap\mathbb{R} - \{1\} = (1,+\infty)$$

### ۱.۲.۱ ترکیب دو تابع

**۴۶.۱ تعریف.** برای دو تابع $f(x)$ و $g(x)$، با دامنه‌های $D_f$ و $D_g$؛ ترکیب دو تابع $f$ و $g$ را بصورت زیر نمایش می‌دهیم

$$(fog)(x) = f(g(x))$$

که برای آن دامنه‌ی تابع $fog$ را بصورت $D_{fog}$ نمایش می‌دهند و برابر است با

$$D_{fog} = \left\{x \,\middle|\, x \in D_g \ , \ g(x) \in D_f\right\}$$

**۴۷.۱ مثال.** فرض کنید $f(x) = x-1$ و $g(x) = 2x^3$ باشد در اینصورت

$$(fog)(x) = f(g(x)) = f(2x^3) = 2x^3 - 1$$

و همچنین $D_f = \mathbb{R}$ و $D_g = \mathbb{R}$،

$$D_{fog} = \mathbb{R}$$

**۴۸.۱ مثال.** ترکیب $fog$ را برای دو تابع $f(x) = \sqrt{x-1}$ و $g(x) = x^2+1$ را یافته و دامنه‌ی $fog$ را محاسبه کنید؟

$$(fog)(x) = f(g(x)) = f(x^2+1) = \sqrt{x^2+1-1} = \sqrt{x^2} = |x|$$

$$D_f = [1,+\infty)$$

$$D_g = \mathbb{R}$$

$$D_{fog} = \left\{x \,\middle|\, x \in D_g \ , \ g(x) \in D_f\right\} = \mathbb{R}$$

### ۲.۲.۱ توابع مثلثاتی

توابع مثلثاتی عبارتند از sin ، cos ، tan و cot ؛
که می‌تواند بصورت مجزا یا ترکیبی از این توابع درنظر گرفته شود.

**۴۹.۱ مثال.**

۱. $f(x) = sinx$

۲. $f(x) = cos(2x)$

۳. $f(x) = tan(2x) - cos(x)$

### ۳.۲.۱ تابع متناوب

**۵۰.۱ تعریف.** تابع $f(x)$ را **متناوب** می‌گوییم، هرگاه بتوان $T > 0$ ای را یافت که

$$\forall x \in D_f \quad ; \quad f(x+T) = f(x) \tag{۱.۱}$$

و کوچکترین مقدار $T > 0$ ای را که در رابطه‌ی ۱.۱ صدق کند را دوره‌ی تناوب اصلی تابع $f(x)$ می‌نامیم.

**۵۱.۱ مثال.** دوره‌ی تناوب توابع مثلثاتی $f(x) = \sin(x)$ و $g(x) = \cos(2x)$ را بیابید؟

$$\begin{aligned} f(x+2\pi) &= \sin(x+2\pi) \\ &= \sin(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(x+\pi) &= \cos(2x+\pi) \\ &= \cos(2x) \end{aligned}$$

به کمک جدول زیر می‌توان دوره‌ی تناوب توابع مثلثاتی را مشخص نمود.

| تابع مثلثاتی | دوره تناوب | تابع مثلثاتی | دوره تناوب |
|---|---|---|---|
| $y = \sin^{2k-1} ax$ | $T = \frac{2\pi}{\lvert a\rvert}$ | $y = \sin^{2k} ax$ | $T = \frac{\pi}{\lvert a\rvert}$ |
| $y = \cos^{2k-1} ax$ | $T = \frac{2\pi}{\lvert a\rvert}$ | $y = \cos^{2k} ax$ | $T = \frac{\pi}{\lvert a\rvert}$ |
| $y = \tan^{2k-1} ax$ | $T = \frac{\pi}{\lvert a\rvert}$ | $y = \tan^{2k} ax$ | $T = \frac{\pi}{\lvert a\rvert}$ |
| $y = \cot^{2k-1} ax$ | $T = \frac{\pi}{\lvert a\rvert}$ | $y = \cot^{2k} ax$ | $T = \frac{\pi}{\lvert a\rvert}$ |