فصل ۴

کاربرد مشتق

بخش ۱.۴ دیفرانسیل تابع

۱.۴ تعریف. برای مشتق تابع $y = f(x)$ می‌توانیم از نماد $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ استفاده کنیم که در آن dx و dy نمادهای مستقل می‌باشند. دیفرانسیل تابع f را با عبارت $dy = f'(x)dx$ نمایش می‌دهند.

۲.۴ مثال. دیفرانسیل توابع زیر را بدست آورید؟

الف) $y = x^3 + 2x^2 - 4$

$$dy = (3x^2 + 4x)dx$$

ب) $y = \ln(x^2 + 1)$

$$dy = (\frac{2x}{x^2 + 1})dx$$

ج) $y = \sin t + t^2$

$$dy = (\cos t + 2t)dt$$

بخش ۲.۴ معادله‌ی خط مماس بر منحنی

در تابع $y = f(x)$ برای پیدا کردن معادله‌ی خط مماس بر منحنی در نقطه‌ی x_0 ابتدا شیب[1] این خط را که برابر با $m = f'(x_0)$ است را بدست آورده و با استفاده‌ی از رابطه‌ی

$$y - y_0 = m(x - x_0) \qquad (۱.۴)$$

(معادله‌ی خط) که در آن $y_0 = f(x_0)$ می‌باشد به معادله‌ی خط مماس بر منحنی می‌رسیم.

۳.۴ مثال. معادله‌ی خط مماس بر منحنی $y = x^2$ را در نقطه‌ی $x_0 = -1$ بیابید؟

$$y' = 2x \quad \longrightarrow \quad y'(-1) = 2(-1) = -2 \quad \longrightarrow \quad m = -2$$

$$y(-1) = (-1)^2 = 1$$

$$x_0 = -1 \quad \longrightarrow \quad y_0 = 1$$

حال با استفاده از رابطه‌ی ۱.۴ داریم:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \quad \longrightarrow \quad y - 1 = -2(x - (-1)) \quad \longrightarrow \quad y = -2x - 1$$

۴.۴ مثال. معادله‌ی خط مماس بر منحنی $y = \sqrt{x}$ را در نقطه‌ی بطول $x_0 = 4$ بیابید؟

$$y = x^{\frac{1}{2}} \quad \longrightarrow \quad y' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \longrightarrow \quad y'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{2(2)} = \frac{1}{4} \quad \longrightarrow \quad m = \frac{1}{4}$$

از طرفی عرض نمودار در نقطه‌ی $x_0 = 4$ برابر است با :

$$y_0 = y(4) = \sqrt{4} = 2$$

پس نقطه‌ی موردنظر در دستگاه مختصات $(4, 2)$ می‌باشد:

$$(x_0, y_0) = (4, 2)$$

حال به کمک رابطه‌ی ۱.۴ معادله‌ی خط مماس را می‌یابیم:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \quad \longrightarrow \quad y - 2 = \frac{1}{4}(x - 4) \quad \longrightarrow \quad y = \frac{1}{4}x + 1$$

[1] به شیب خط مماس بر منحنی، ضریب زاویه خط مماس بر منحنی نیز گفته می‌شود.

بخش ۳.۴ معادله‌ی خط قائم بر منحنی

برای بدست آوردن معادله‌ی خط قائم بر منحنی $y = f(x)$ در نقطه‌ی x_0 باید شیب خط قائم را از رابطه‌ی

$$m' = -\frac{1}{m} \tag{۲.۴}$$

بدست آوریم[۲] و سپس با درنظر گرفتن نقطه‌ی (x_0, y_0) معادله‌ی خط قائم به یکی از دو صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} y - y_0 &= m'(x - x_0) \\ &= -\frac{1}{m}(x - x_0) \end{aligned} \tag{۳.۴}$$

۵.۴ مثال. معادله‌ی خط قائم برمنحنی $y = x^3$ را در نقطه‌ی x_0 بدست آورید؟
ابتدا مختصات نقطه‌ی موردنظر در دستگاه مختصات را می‌یابیم:

$$y(1) = (1)^3 = 1 \quad \longrightarrow \quad (x_0, y_0) = (1, 1)$$

اکنون بکمک رابطه‌ی ۲.۴ به محاسبه‌ی شیب خط قائم می‌پردازیم:

$$y' = 3x^2 \quad \longrightarrow \quad m = y'(1) = 3(1)^2 = 3 \quad \longrightarrow \quad m' = \frac{-1}{3}$$

و درادامه با استفاده از رابطه‌ی ۳.۴ به معادله‌ی خط قائم خواهیم رسید:

$$y - 1 = -\frac{1}{3}(x - 1) \quad \longrightarrow \quad y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$$

۶.۴ مثال. معادله خط مماس و قائم بر منحنی $y = x^4 - 3x^2 - 16$ را در نقطه‌ی به طول $x_0 = 1$ بیابید؟
ابتدا می‌بایستی مختصات نقطه‌ی موردنظر را در دستگاه مختصات بیابیم:

$$f(x) = x^4 - 3x^2 - 16 \quad \longrightarrow \quad f(1) = (1)^4 - 3(1) - 16 = 1 - 19 = -18$$

بنابراین $(x_0, y_0) = (1, -18)$ می‌باشد و شیب خط مماس (m) نیز بصورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$f'(x) = 4x^3 - 6x \quad \longrightarrow \quad m = f'(1) = 4(1)^3 - 6(1) = 4 - 6 = -2$$

و شیب خط قائم نیز بکمک رابطه‌ی ۲.۴ برابر است با

$$m' = -\frac{1}{m} = -\frac{1}{-2} = \frac{1}{2}$$

[۲] شیب خط مماس را با m و شیب خط قائم را با m' نشان می‌دهیم.

اکنون معادله‌ی خط مماس با استفاده از رابطه‌ی ۱.۴ برابر است با:

$$y-(-18)=-2(x-1) \quad \longrightarrow \quad y=-2x-16$$

و معادله‌ی خط قائم نیز با استفاده از رابطه‌ی ۳.۴ برابر است با:

$$y-(-18)=\frac{1}{2}(x-1) \quad \longrightarrow \quad y=\frac{1}{2}x-\frac{37}{2}$$

بخش ۴.۴ نقاط اکسترمم

۷.۴ تعریف(ماکزیمم). به نقطه‌ای که درآن مقدار عرض تابع بیشتر از نقاط دیگر است ماکزیمم گفته می‌شود.

۸.۴ تعریف(مینیمم). به نقطه‌ای که در آن مقدار عرض تابع کمتر از نقاط دیگر است مینیمم گفته می‌شود.

۹.۴ تعریف. به نقطه‌ای که مشتق در آن برابر با صفر باشد یا مشتق در آن نقطه وجود نداشته باشد، یک نقطه‌ی بحرانی گفته می‌شود.

۱۰.۴ تذکر. برای یافتن نقاط اکسترمم بایستی نقاط بحرانی تابع را بیابیم.

۱۱.۴ مثال. نقاط اکسترمم تابع $f(x)=x^2$ را بازه‌ی $[-1,2]$ بیابید و مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق آن را مشخص کنید؟

$$f(x)=x^2 \quad \longrightarrow \quad f'(x)=2x$$

$$f'(x)=0 \quad \longrightarrow \quad 2x=0 \quad \longrightarrow \quad x=0$$

۱۲.۴ نکته. نقاط ابتدا و انتهای بازه نیز جزء نقاط اکسترمم تابع می‌باشند.

$$\text{نقاط اکسترمم} = \{-1,0,2\}$$

حال مقادیر تابع f را در نقاط اکسترمم محاسبه می‌کنیم.

$$f(-1)=1 \quad , \quad f(0)=0 \quad , \quad f(2)=4$$

پس $Max=4$ و $Min=0$ است.

بخش ۵.۴ جهت تقعر تابع

جهت تقعر تابع با استفاده از علامت مشتق دوم مشخص می‌گردد:
الف) اگر $f'' > 0$ باشد، جهت تقعر تابع به سمت بالا خواهد بود.
ب) اگر $f'' < 0$ باشد، جهت تقعر تابع به سمت پایین خواهد بود.

۱۳.۴ تعریف(نقطه عطف). نقطه‌ی c برای تابع $f(x)$ را یک نقطه‌ی عطف می‌نامیم هرگاه $f'(c)$ موجود باشد و مشتق دوم در نقطه‌ی c تغییر علامت بدهد.

۱۴.۴ تذکر. در واقع در نقطه‌ی عطف جهت تقعر تابع تغییر می‌کند.

۱۵.۴ نکته. اگر $f(x)$ تابعی پیوسته بر بازه‌ی $[a,b]$ و بر (a,b) مشتق‌پذیر باشد آن‌گاه:

۱) اگر $f'(x) \geq 0$ باشد، تابع صعودی است.

۲) اگر $f'(x) \leq 0$ باشد، تابع نزولی است.

۳) اگر $f'(x) > 0$ باشد، تابع اکیداً صعودی است.

۴) اگر $f'(x) < 0$ باشد، تابع اکیداً نزولی است.

۱۶.۴ مثال. صعودی و نزولی بودن تابع $f(x) = x^2$ را در بازه‌ی $[-2,2]$ بررسی کنید؟

$$f(x) = x^2 \quad \longrightarrow \quad f'(x) = 2x$$

حال می‌بایستی f' را تعیین علامت کنیم:

$$f'(x) = 0 \quad \longrightarrow \quad 2x = 0 \quad \longrightarrow \quad x = 0$$

x	$x<0$	0	$x>0$
$f' = 2x$	$-$	0	$+$

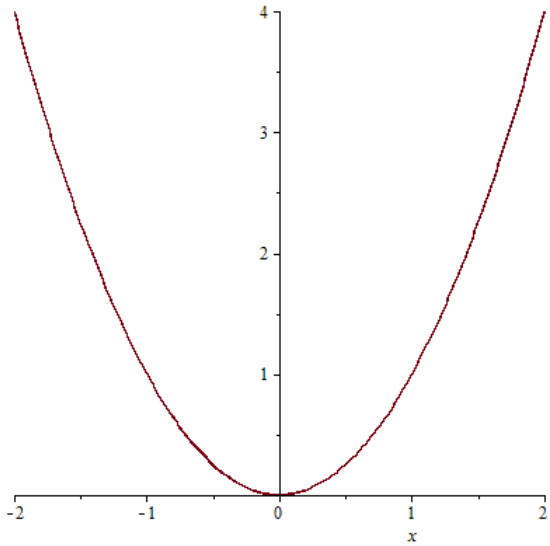
بنابراین تابع در بازه‌ی $[-2,0]$ نزولی و در بازه‌ی $[0,2]$ صعودی می‌باشد.

۱۷.۴ مثال. صعودی یا نزولی بودن تابع $f(x) = x - \cos x$ را روی بازه‌ی $[0,2\pi]$ بررسی کنید؟

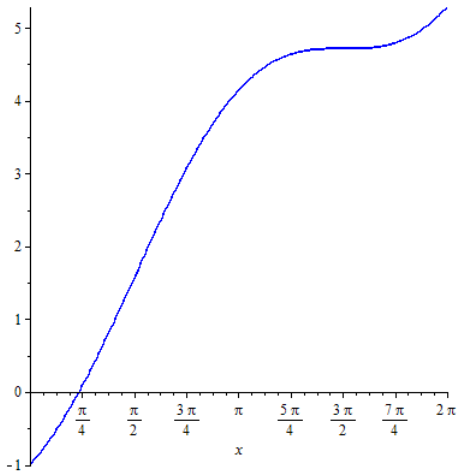
$$f(x) = x - \cos x \quad \longrightarrow \quad f'(x) = 1 + \sin x$$

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \quad \longrightarrow \quad 0 \leq 1 + \sin x \leq 2$$

بنابراین همواره $0 \leq f'$ است، و درنتیجه تابع $f(x)$ همواره صعودی می‌باشد.



شکل ۱.۴: در این شکل صعودی و نزولی بودن تابع $f = x^2$ نمایش داده می‌شود.



شکل ۲.۴: نمودار تابع $f(x) = x - \cos x$ در بازه‌ی $[0, 2\pi]$.

بخش ۶.۴ قاعده‌ی هوپیتال

هدف از ارایه این بخش کمک به حل برخی از حالت‌های حد است که بصورت $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ می‌باشد.

۱۸.۴ قضیه. اگر حد $\frac{f(x)}{g(x)}$ در x_0 بصورت

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\begin{cases}\frac{0}{0}\\ \text{یا}\\ \frac{\infty}{\infty}\end{cases}$$

و دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ هر دو در همسایگی x_0 مشتق پذیر باشند، در این صورت :

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

خواهد بود.

۱۹.۴ مثال. حدهای زیر را محاسبه کنید؟

۱) $\lim_{x\to -1}\frac{x^3+1}{x+1}$

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3+1}{x+1}=^{Hop}\lim_{x\to -1}\frac{3x^2}{1}=\frac{3(-1)^2}{1}=\frac{3}{1}=3$$

۲) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=^{Hop1}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=^{Hop2}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2}=\frac{1}{2}$$

۳) $\lim_{x\to\infty}\frac{3x+2}{5x-1}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x+2}{5x-1}=^{Hop}\lim_{x\to\infty}\frac{3}{5}=\frac{3}{5}$$

۴) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\tan(-x)}{\tan x}$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\tan(-x)}{\tan x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{1}{\cot(-x)}}{\frac{1}{\cot x}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cot x}{\cot(-x)}=\frac{0}{0}$$

$$\overset{Hop}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-(1+\cot^2 x)}{1+\cot^2(-x)} = \frac{-(1+0)}{1+0} = \frac{-1}{1} = -1$$

۲۰.۴ نکته. توابع مثلثاتی که حد آن‌ها بصورت $\frac{\infty}{\infty}$ باشد را بایستی به حالت $\frac{0}{0}$ تبدیل نمود.

۵) $\lim_{x\to-\frac{1}{4}} \frac{1+\sin 2\pi x}{(2x+\frac{1}{2})^2}$

$$\lim_{x\to-\frac{1}{4}} \frac{1+\sin 2\pi x}{(2x+\frac{1}{2})^2} \overset{Hop1}{=} \lim_{x\to-\frac{1}{4}} \frac{2\pi\cos(2\pi x)}{4(2x+\frac{1}{2})} \overset{Hop2}{=} \lim_{x\to-\frac{1}{4}} \frac{-(2\pi)^2\sin(2\pi x)}{8}$$

$$= \frac{-4\pi^2\sin(-\frac{\pi}{2})}{8} = \frac{\pi^2}{2}$$

۱.۶.۴ حالت $0\times\infty$

اگر در جریان محاسبه حد توابع به حالت $0\times\infty$ برخورد کنیم، می‌توانیم با تبدیل این حالت به $\frac{0}{0}$ از قاعده‌ی هوپیتال برای محاسبه‌ی حد کمک بگیریم. در ادامه با ذکر چند مثال روش تبدیل حالت $0\times\infty$ به $\frac{0}{0}$ را نشان خواهیم داد:

$$\lim_{x\to0}(1-\cos x)\cot x = 0\times\infty$$

اکنون حد فوق را به $\frac{0}{0}$ تبدیل خواهیم کرد:

$$\lim_{x\to0}(1-\cos x)\cot x = \lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\frac{1}{\cot x}} = \lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\tan x} = \frac{0}{0}$$

$$\overset{Hop}{=} \lim_{x\to0}\frac{\sin x}{1+\tan^2 x} = \frac{0}{1+0} = \frac{0}{1} = 0$$

۲۱.۴ مثال. حد زیر را محاسبه کنید؟

$$\lim_{x\to2}(2-x)\tan\frac{\pi x}{4}$$

$$\lim_{x\to 2}(2-x)\tan\frac{\pi x}{4}=\lim_{x\to 2}\frac{2-x}{\dfrac{1}{\tan\frac{\pi x}{4}}}=\lim_{x\to 2}\frac{2-x}{\cot\frac{\pi x}{4}}=\frac{0}{0}$$

$$\overset{Hop}{=}\lim_{x\to 2}\frac{-1}{-\frac{\pi}{4}(1+\cot^2\frac{\pi}{4}x)}=\frac{-1}{-\frac{\pi}{4}}=\frac{4}{\pi}$$

بخش ۷.۴ قضایای مقدار میانگین و رول

۲۲.۴ قضیه مقدار میانگین. فرض کنید تابع $f(x)$ در بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته و در بازه‌ی (a,b) مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه حداقل یک نقطه‌ی c که $a<c<b$ می‌باشد وجود دارد که

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \qquad (۴.۴)$$

۲۳.۴ مثال. با توجه به قضیه مقدار میانگین مقدار c را برای تابع $f(x)=x^2+3x$ را در بازه‌ی $[-2,1]$ بیابید؟

$$f'(x)=2x+3 \quad\longrightarrow\quad f'(c)=2c+3$$

$$a=-2 \quad\longrightarrow\quad f(-2)=(-2)^2+3(-2)=4-6=-2 \quad\longrightarrow\quad f(a)=-2$$

$$b=1 \quad\longrightarrow\quad f(1)=(1)^2+3(1)=1+3=4 \quad\longrightarrow\quad f(b)=4$$

حال با توجه به رابطه‌ی ؟؟ داریم

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{4-(-2)}{1-(-2)}=\frac{6}{3}=2$$

پس

$$2c+3=2 \quad\longrightarrow\quad 2c=-1 \quad\longrightarrow\quad c=-\frac{1}{2}$$

۲۴.۴ قضیه رول. اگر $f(x)$ بر بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته و بر (a,b) مشتق‌پذیر و $f(a)=f(b)$ باشد، در این صورت نقطه‌ی c که $a<c<b$ می‌باشد، وجود دارد بطوری که :

$$f'(c)=0$$

۲۵.۴ مثال. عدد c موردنظر در قضیه‌ی رول برای تابع $f(x) = x^2 + 5x - 6$ را در بازه‌ی $[-3, 1]$ بیابید؟

$$f'(x) = 2x + 5$$

$$f'(c) = 0 \quad \longrightarrow \quad 2c + 5 = 0 \quad \longrightarrow \quad c = -\frac{5}{2}$$

۲۶.۴ نتیجه قضیه رول. اگر $f(x)$ تابعی مشتق پذیر باشد، بین هر دو ریشه‌ی $f(x) = 0$ حداقل یک نقطه‌ی اکسترمم وجود دارد که $f'(x) = 0$ است.

بخش ۸.۴ معادله خط

۲۷.۴ تعریف. معادله‌ی خط گذرنده از نقطه‌ی $P_0 = (x_0, y_0)$ با شیب m از رابطه‌ی

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

بدست می‌آید.

۲۸.۴ تذکر. گاهی اوقات در محاسبه‌ی معادله‌ی خط شیب m را به ما نمی‌دهند و در نتیجه می‌بایستی مختصات دو نقطه‌ی (بطور فرض) $p_1 = (x_1, y_1)$ و $p_2 = (x_2, y_2)$ را درنظر گرفته و سپس با استفاده از

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

شیب m را مشخص کنیم.

۲۹.۴ مثال. معادله‌ی خط گذرنده از نقطه‌ی $p = (2, 3)$ که دارای شیب $m = 2$ است را مشخص کنید؟

$$m = 2 \quad , \quad x_0 = 2 \quad , \quad y_0 = 3$$

$$y - y_0 = m(x - x_0) \qquad \longrightarrow \qquad y - 3 = 2(x - 2)$$

$$y - 3 = 2x - 4 \qquad \longrightarrow \qquad y = 2x - 1$$

۳۰.۴ مثال. معادله‌ی خط گذرنده از نقاط $(2, -1)$ و $(1, 3)$ را بدست آورید؟
ابتدا با توجه به مختصات دو نقطه می‌بایستی شیب خط مورد نظر را تعیین کنیم

$$x_1 = 2 \quad , \quad x_2 = 1 \quad , \quad y_1 = -1 \quad , \quad y_2 = 3$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3 - (-1)}{1 - 2} = \frac{4}{-1} = -4$$

اکنون یکی از دو نقطه $(p = (1, 3))$ را انتخاب کرده و با توجه به مقدار $m = -4$ معادله‌ی خط را بدست می‌آوریم

$$y - 3 = -4(x - 1) \quad \rightarrow \quad y - 3 = -4x + 4 \quad \rightarrow \quad y = -4x + 7$$

بخش ۹.۴ کاربرد مشتق در بهینه‌سازی

یکی از کاربردهای محاسبه‌ی اکسترمم مطلق بحث بهینه سازی است. در اینجا تابعی که باید بهینه شود را بر حسب یک متغییر می‌نویسیم و با توجه به دامنه‌ی تغییرات مقادیر اکسترمم مطلق آن را محاسبه می‌کنیم.

۳۱.۴ مثال. اگر در یک نانوایی قیمت هر عدد نان برابر با x تومان بوده و تعداد تقاضا در هر روز برابر با $۲۰۰-۴x$ عدد باشد، آن‌گاه بیشترین درآمد به ازای چه قیمتی برای هر عدد نان بدست خواهد آمد؟

حل:

در اینجا تابع درآمد را با $f(x)$ نمایش می‌دهیم

$$f(x) = x(200-4x)$$

$$f(x) = -4x^2 + 200x$$

$$f'(x) = -8x + 200 \quad \rightarrow \quad f' = 0 \quad \rightarrow \quad -8x + 200 = 0$$

$$8x = 200 \quad \rightarrow \quad x = 25$$

$$f''(x) = -8 < 0$$

$$f(25) = -4(25)^2 + 200(25) = -2500 + 5000 = 2500$$

بنابراین $x = 25$ یک نقطه‌ی ماکزیمم برای تابع $f(x)$ خواهد بود و بهترین قیمت برای هرعدد نان در این نانوایی 25 تومان است.

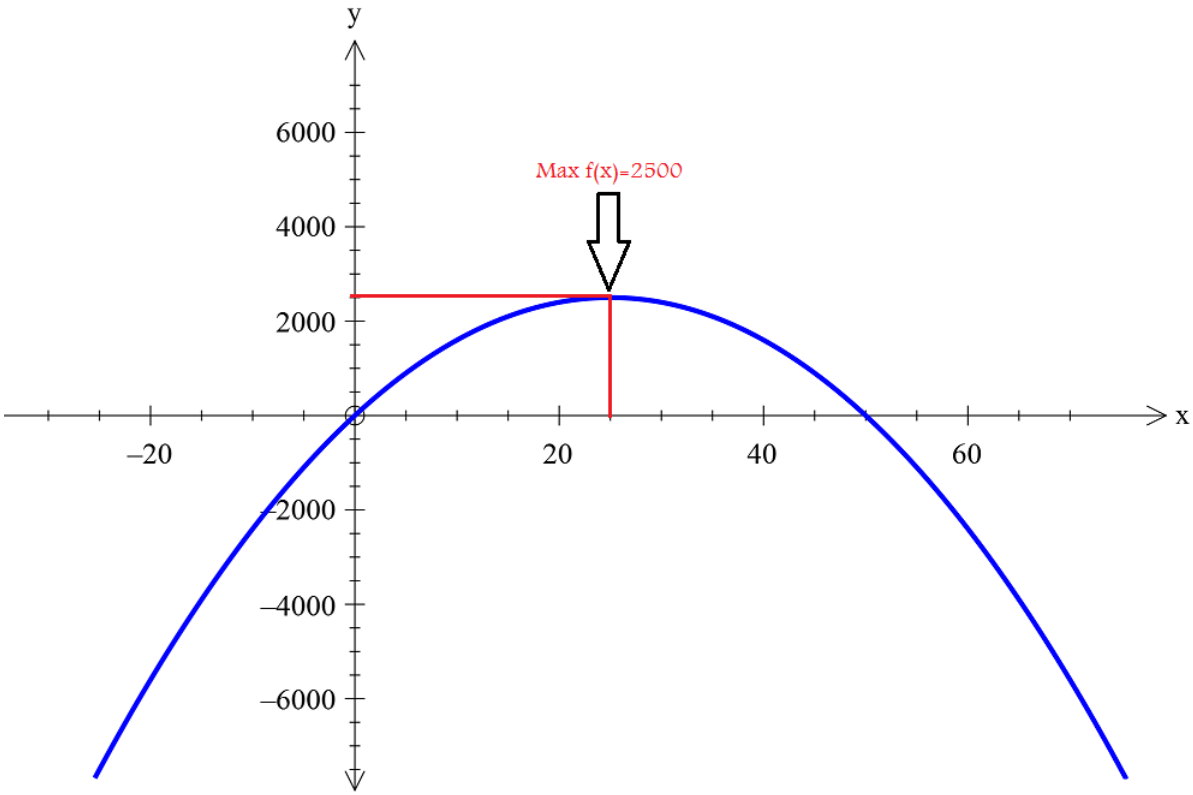
۳۲.۴ مثال. یک کارخانه تولید برق در منطقه‌ای کوچک در حال فعالیت می‌باشد بطوری که این کارخانه در هر روز x وات برق تولید کرده و قیمت فروش هر وات برق برابر با $۳۰۰-۲x$ یورو است؛ همچنین هزینه‌ی تولید x وات برق برابر با $۲۰x+۱۵$ یورو می‌باشد. با توجه به شرایط ذکر شده در مسئله برای کسب بیشترین سود بهتر است کارخانه در هر روز چند وات برق تولید کند؟

حل:

میزان درآمد حاصل از فروش هر وات برق را می‌توان برحسب x و بصورت تابع زیر بیان نمود

$$g(x) = x(300-2x) = -2x^2 + 300x$$

با توجه به هزینه تولید هر وات برق سود حاصل از فروش هر x وات برق بصورت زیر خواهد بود:



شکل ۳.۴: نمودار تابع درآمد $f(x) = -4x^2 + 200x$ که مربوط به مثال اول از مبحث بهینه سازی می‌باشد.

$$f(x) = \text{درآمد} - \text{هزینه} = -2x^2 + 300x - 20x - 15$$

$$f(x) = -2x^2 + 280x - 15$$

اکنون می‌بایستی برای تابع فوق بیشترین مقدار یا همان ماکسیمم را مشخص کنیم.

$$f'(x) = -4x + 280 \quad , \quad f''(x) = -4 < 0$$

$$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad -4x + 280 = 0$$

$$4x = 280 \quad \rightarrow \quad x = 70$$

بنابراین تابع $f(x)$ به‌ازای $x = 70$ به بیشترین مقدار خود می‌رسد که برابر با

$$f(70) = -2(70)^2 + 280(70) - 15 = 9785$$

بنابراین این کارخانه برای کسب بیشترین سود می‌بایستی $x = 70$ وات برق در روز تولید کرده و بفروشد تا 9785 یورو در هر روز سود داشته باشد.

بخش ۱۰.۴ رسم نمودار

برای رسم نمودار یک تابع درجه دو یا سه می‌بایستی مشتقات اول و دوم تابع را محاسبه نموده و با پیدا کردن جواب‌هایی از f، f' و f'' که برابر با 0 می‌گردند جدول تعیین علامت را تشکیل داده و بکمک این جدول به صعودی یا نزولی بودن تابع و تعیین جهت تقعر تابع پرداخته شود تا درنتیجه بتوانیم به رسم نمودار تابع دست یابیم.

۳۳.۴ مثال. نمودار تابع $f(x) = x^2 + 4x + 4$ را رسم کنید؟

$$f(x) = 0 \quad \longrightarrow \quad x^2 + 4x + 4 = 0$$

$$\Delta = (4)^2 - 4(1)(4) = 16 - 16 = 0 \quad \longrightarrow \quad x = \frac{-4}{2(1)} = -2$$

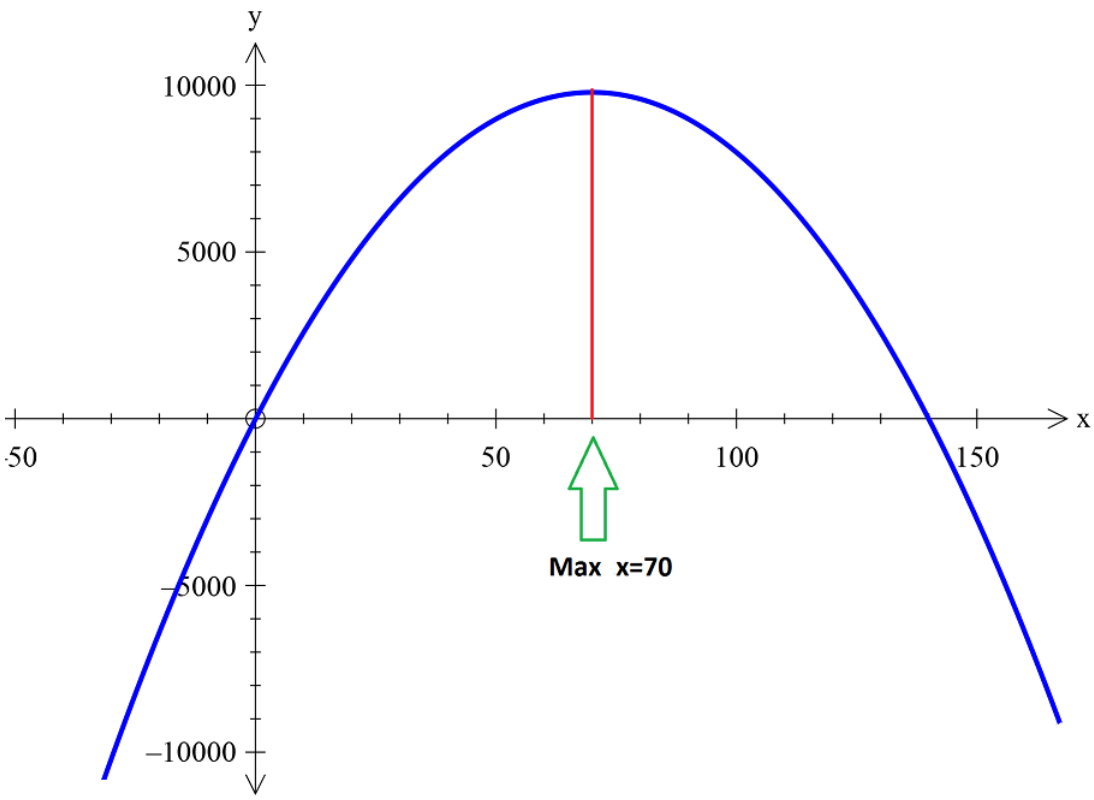
$$f(x) = x^2 + 4x + 4 = 0 \quad \longrightarrow \quad x = -2$$

$$f(x) = x^2 + 4x + 4 \quad \longrightarrow \quad f'(x) = 2x + 4$$

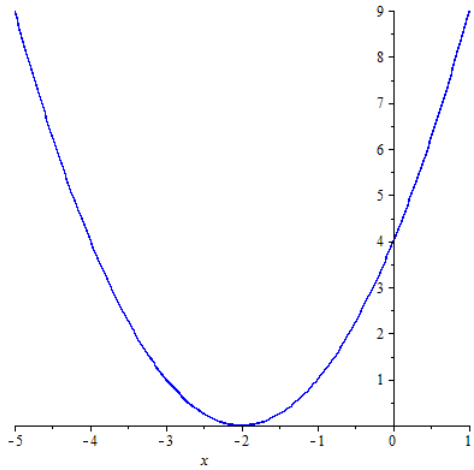
$$f'(x) = 0 \quad \longrightarrow \quad 2x + 4 = 0 \quad \longrightarrow \quad x = -2$$

$$f'(x) = 2x + 4 \quad \longrightarrow \quad f''(x) = 2 > 0$$

اکنون بسراغ تعیین جدول تعیین علامت برای تابع f و مشتقات آن می‌رویم



شکل ۴.۴: نمودار تابع $f(x) = -2x^2 + 280x - 15$ که مربوط به مثال دوم از مبحث بهینه سازی می‌باشد.



شکل ۵.۴: نمودار تابع x^2+4x+4

x	$x<-2$	-2	$x>-2$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

و نمودار آن در دستگاه مختصات بصورت شکل زیر خواهد بود.

۳۴.۴ مثال. نمودار تابع $f(x)=-x^2+5x-6$ را رسم کنید؟

$$f(x)=0 \quad\longrightarrow\quad -x^2+5x-6=0$$

$$\Delta=(5)^2-4(-1)(-6)=25-24=1>0$$

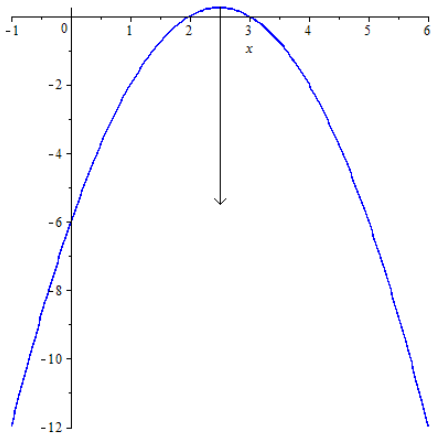
$$x=\frac{-(5)\pm\sqrt{1}}{2(-1)} \quad\longrightarrow\quad x=\frac{-5\pm1}{-2}=\frac{-4}{-2},\frac{-6}{-2}=2,3$$

$$f(x)=-x^2+5x-6 \quad\longrightarrow\quad f'(x)=-2x+5$$

$$f'(x)=0 \quad\longrightarrow\quad -2x+5=0 \quad\longrightarrow\quad x=\frac{5}{2}=2.5$$

$$f'(x)=-2x+5 \quad\longrightarrow\quad f''(x)=-2<0$$

اکنون جدول موردنظر برای رسم نمودار این تابع را تشکیل می‌دهیم



شکل ۶.۴: نمودار تابع $f(x) = -x^2 + 5x - 6$ و جهت تقعر آن که به پایین است.

x		2		2.5		3	
f'	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
f''	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
f	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$		$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$

۳۵.۴ مثال. نمودار تابع $f(x) = x^3$ را رسم کنید؟

$$f(x) = x^3 \quad \longrightarrow \quad f'(x) = 3x^2 \quad \longrightarrow \quad f''(x) = 6x$$

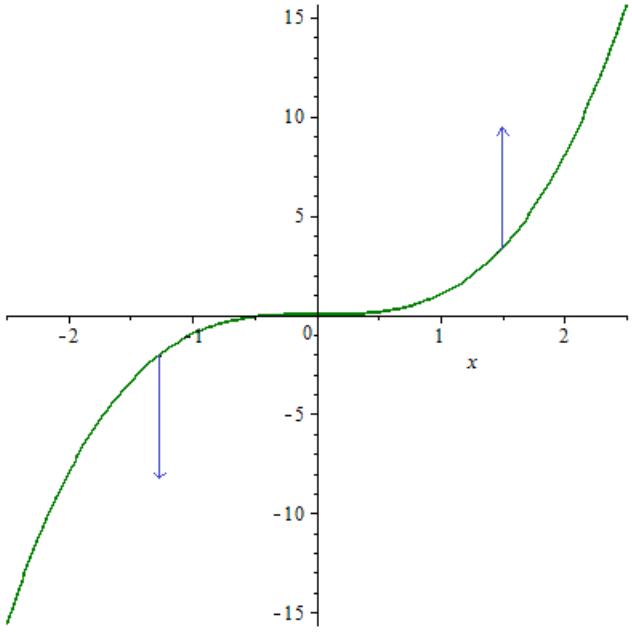
$$f(x) = 0 \quad \longrightarrow \quad x^3 = 0 \quad \longrightarrow \quad x = 0$$

$$f'(x) = 0 \quad \longrightarrow \quad 3x^2 = 0 \quad \longrightarrow \quad x = 0$$

$$f''(x) = 0 \quad \longrightarrow \quad 6x = 0 \quad \longrightarrow \quad x = 0$$

و در ادامه جدول موردنظر برای ترسیم تابع $f(x) = x^3$ بصورت زیر خواهد بود:

x		0	
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\nearrow$



شکل ۷.۴: نمودار تابع $y = x^3$ و جهت تقعر آن که در نقطه‌ی بطول 0 تغییر می‌کند.

از آنجایی که نقطه‌ی 0 یک جواب $f''(x) = 0$ است و مشتق دوم در 0 تغییر علامت می‌دهد 0 برای تابع $y = x^3$ یک نقطه‌ی عطف می‌باشد.

۳۶.۴ مثال. نمودار تابع $y = x^3 + 2x^2$ را رسم کنید؟

$$y = x^3 + 2x^2 \quad \longrightarrow \quad y' = 3x^2 + 4x \quad \longrightarrow \quad y'' = 6x + 4$$

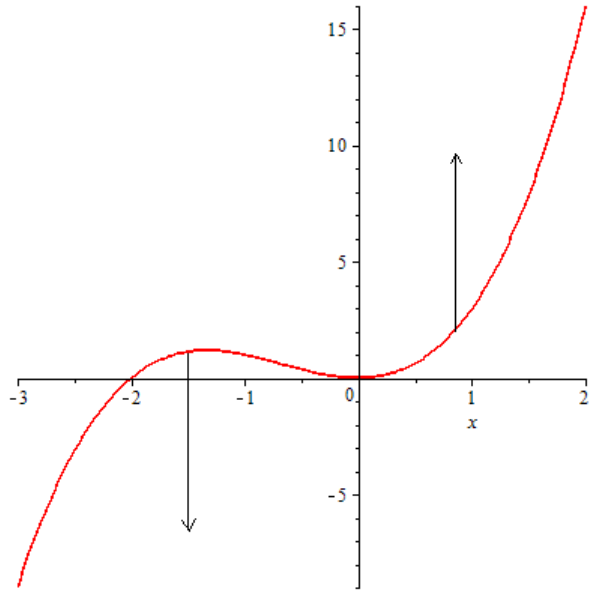
$$y = 0 \quad \longrightarrow \quad x^3 + 2x^2 = 0 \quad \longrightarrow \quad x^2(x+2) = 0 \quad \longrightarrow \quad x = -2, 0$$

$$y' = 3x^2 + 4x = 0 \quad \longrightarrow \quad \Delta = 16 \quad \longrightarrow \quad x = \frac{-4 \pm 4}{6} = -\frac{4}{3}, 0$$

$$y'' = 0 \quad \longrightarrow \quad 6x + 4 = 0 \quad \longrightarrow \quad x = -\frac{2}{3}$$

اکنون جدول مورد نظر برای ترسیم نمودار را با توجه به نقاط $c = -2, -\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, 0$ درنظر می‌گیریم:

$$y(-2) = 0 \quad , \quad y(-\frac{4}{3}) = \frac{32}{27} = 1.19 \quad , \quad y(-\frac{2}{3}) = \frac{16}{27} = 0.59 \quad , \quad y(0) = 0$$



شکل ۸.۴: نمودار تابع $y = x^3 + 2x^2$ که در آن نقطه‌ی ۰ یک نقطه‌ی عطف بوده و جهت تقعر تابع عوض می‌شود، همچنین این تابع تا نقطه‌ی $-\frac{4}{3}$ صعودی و از $-\frac{4}{3}$ تا 0 نزولی و از 0 به بعد صعودی می‌باشد.

x		-2		$-\frac{4}{3}$		$-\frac{2}{3}$		0	
y'	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y''	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
y	$\nearrow$	0	$\nearrow$		$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	0	$\nearrow$