صفحه اول

ریاضی عمومی (۱)

بسم الله الرحمن الرحیم

تابع

حاصلضرب دکارتی دو مجموعه: حاصلضرب دکارتی دو مجموعه A و B که با نماد $A\times B$ نشان داده می‌شود مجموعه الزوج‌های مرتب (x,y) است که در آن $x\in A$ و $y\in B$.

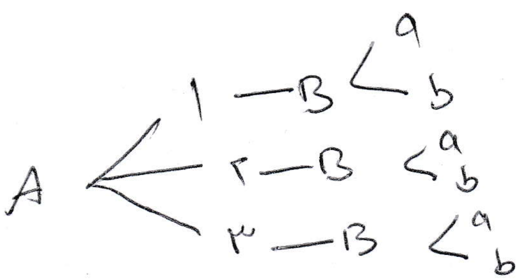
$$A\times B=\{(x,y)\mid x\in A,\ y\in B\}$$

مثال:

$A=\{1,2,3\}$

$B=\{a,b\}$

$A\times B=$



(1,a)
(1,b)
(2,a)
(2,b)
(3,a)
(3,b)

$$A\times B=\{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a),(3,b)\}$$

$$B\times A=\{(a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3)\}$$

با توجه به دو مجموعه فوق: $A\times B\neq B\times A$

یعنی حاصلضرب دکارتی دو مجموعه خاصیت جابجایی ندارد.

رابطه: رابطه R از مجموعه A به B، زیرمجموعه‌ای از تمام زوج‌های مرتب $A \times B$ است که در قانون (رابطه) R صدق می‌کند

$$R : A \longrightarrow B$$

$$R = \{(x,y) \in A \times B \mid xRy\}$$

مثال: در مجموعه‌ی $A \times B$ $(B \times A)$ می‌توان هر کدام از زیرمجموعه‌های آن را یک رابطه A به B (یا B به A) در نظر گرفت

مثال: دو مجموعه $A = \{۱۰, ۲۰, ۲۱, ۲۲\}$ و $B = \{۰, ۱, ۲\}$ را در نظر بگیرید. رابطه R از مجموعه A به B را این صورت تعریف می‌کنیم که R مجموعه همه زوج‌های مرتب (x,y) باشد که y رقم یکان x است. بنابراین R به صورت زیر خواهد بود

$$R : A \longrightarrow B$$

$$R = \{(۱۰,۰), (۲۰,۰), (۲۱,۱), (۲۲,۲)\}$$

دامنه و برد رابطه: فرض کنید $R : A \longrightarrow B$ یک رابطه باشد

همه مولفه‌های اول زوج‌های مرتب R را دامنه R گویند.

" " دوم " " " برد " " .

$$\text{دامنه } R = D_R = \{x \in A \mid \exists y \in B,\ xRy\} \subseteq A$$

$$\text{برد } R = Im_R = \{y \in B \mid \exists x \in A,\ xRy\} \subseteq B$$

مثال: فرض کنید $R : N \longrightarrow N$ یک رابطه باشد که در آن $x = ۲y$ است بنابراین (از زوج مرتب (x,y)) دامنه و برد R به صورت زیر محاسبه می‌شود

$R = \{(2,1), (4,2), (6,3), (8,4), \dots\} \subseteq N \times N$

$D_R = \{2, 4, 6, \dots\} \subseteq N$

$Im_R = \{1, 2, 3, 4, \dots\} \subseteq N$

تابع: فرض کنید f یک رابطه از A به B باشد، گوییم f یک تابع از A به B است، اگر هر عنصر از مجموعه A حداکثر با یک عنصر از مجموعه B در رابطه باشد.

به بیان دیگر:

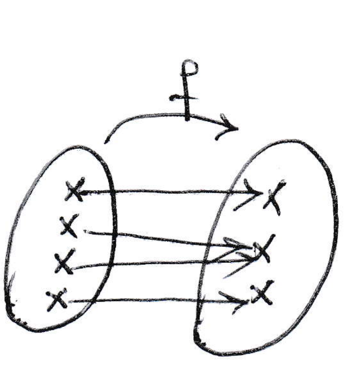
$$\left((x, y_1) \in f \,,\, (x, y_2) \in f\right) \Longrightarrow y_1 = y_2$$

یا به بیان ساده‌تر: در یک رابطه هر دو زوج مرتب که دارای مؤلفه اول نابرابر باشند به آن رابطه، تابع می‌گویند.

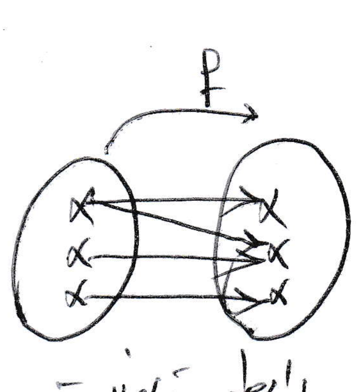
مثال:

$R_1 = \{(1,5), (2,5), (3,6)\}$ رابطه تابع نیست

$R_2 = \{(1,5), (1,6), (3,7)\}$ رابطه تابع است



رابطه تابع است

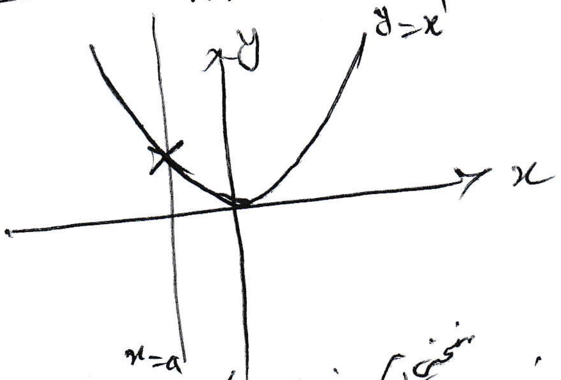


رابطه تابع نیست

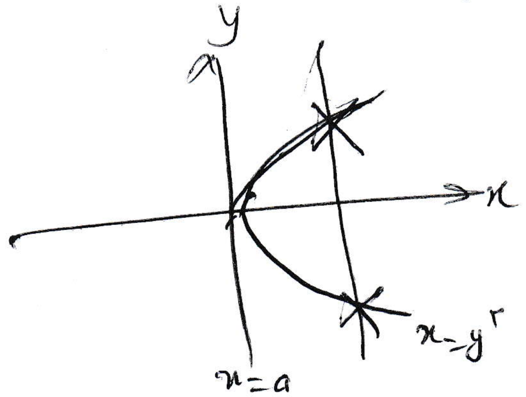
ضابطه تابع:

$\begin{cases} f: A \to B \\ x \xrightarrow{f} y \end{cases}$ یا $\begin{cases} f: A \to B \\ y = f(x) \end{cases}$

تشخیص تابع از روی نمودار : هرگاه خطی موازی محور yها رسم کنیم تا نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند تابع است.



خط $x=a$ منحنی را در یک نقطه قطع کرد. پس تابع است.



خط $x=a$ منحنی را در ۲ نقطه قطع کرد. تابع نمی باشد.

دامنه توابع :

۱- دامنه توابع کثیر الجمله (چند جمله ای) $\mathbb{R}$ می باشد (اعداد حقیقی)

$$f(x)=P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n \quad , a_i\in\mathbb{R}$$

دامنه $D_f=\mathbb{R}$

۲- الف- دامنه توابع رادیکالی با فرجه زوج :

$$f(x)=\sqrt[2k]{g(x)}$$

دامنه $D_f=\{x \mid g(x)\geq 0\}$

ب- دامنه توابع رادیکالی با فرجه فرد :

$$f(x)=\sqrt[2k-1]{g(x)}$$

دامنه $D_f=D_g$

یعنی دامنه تابع f همان دامنه تابع زیر رادیکال می باشد.

ص ۵

۳- دامنه توابع کسری گویا

$$f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$$ (p و q چند جمله ای هستند)

دامنه $D_f = R - \{x \mid q(x)=0\}$

مثال: دامنه توابع زیر را محاسبه نمایید:

الف) $f(x)=\sqrt{x^2+2x+3}$

حل): چون فرجه رادیکال زوج است پس:

$$x^2+2x+3 \geq 0$$

پس ابتدا حل معادله درجه ۲:

$$x^2+2x+3=0$$

$$\Delta = 0 \rightarrow \Delta = b^2-4ac = 4-12=-10<0$$

ریشه حقیقی ندارد

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
x^2+2x+3	+
≥ 0	

پس

$$D_f = R$$

ب) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-x-2}}$

حل):

$$x^2-x-2>0$$

$$x^2-x-2=0 \longrightarrow x=2,\ x=-1$$

x	$-\infty$	-1		2	$+\infty$
x^2-x-2	+	0	−	0	+
>0	ق				ق

$$D_f = (-\infty,-1) \cup (2,+\infty)$$

۱۴ ج) $f(x)=\dfrac{x^2+3}{1-|x|}$

حل) $1-|x|=0 \longrightarrow x=\pm 1$

$$D_f=\mathbb{R}-\{-1,+1\}$$

د) $f(x)=\dfrac{\sqrt{9-x^2}}{x+2}$

حل) $9-x^2\geq 0 \Longrightarrow x^2\leq 9 \Longrightarrow -3\leq x\leq 3$

مخرج نباید صفر شود

$x+2=0 \longrightarrow x=-2$

x	$-\infty$		-3		-2		3		$+\infty$
$9-x^2$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$x+2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)=\frac{\sqrt{9-x^2}}{x+2}$		$+$ ج	0	$-$	∞	$+$ ج	0	$-$	

$$D_f=(-\infty,-3]\cup(-2,3]$$

هـ) $f(x)=\sqrt{x-|x|}$

حل) $x-|x|\geq 0 \longrightarrow x\geq |x|$

به ازای $x\geq 0$ عبارت $x\geq|x|$ صحیح می‌باشد در نتیجه:

$$D_f=[0,+\infty)$$

اعمال روی توابع : فرض کنید f و g دو تابع باشند :

الف) جمع دو تابع :

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$D_{f+g} = D_f \cap D_g$$

ب) تفریق دو تابع :

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$D_{f-g} = D_f \cap D_g$$

ج) ضرب دو تابع

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

$$D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g$$

د) تقسیم دو تابع

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\}$$

ص

مثال: برای دو تابع $f(x)=\sqrt{x^2-4}$ ، $g(x)=x+4$ ، $f\pm g$ ، $f\cdot g$ ، $\frac{f}{g}$ را بدست آورید.

حل): $f(x)=\sqrt{x^2-4}$

$$x^2-4 \geq 0 \longrightarrow x^2 \geq 4 \longrightarrow |x| \geq 2 \Rightarrow x \geq 2 \text{ یا } x \leq -2$$

$$D_f=(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$$

$$g(x)=x+4$$

$$D_g=\mathbb{R}$$

$$(f+g)_{(x)}=f(x)+g(x)=\sqrt{x^2-4}+x+4$$

$$D_{f+g}=D_f\cap D_g=(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$$

$$(f-g)=\sqrt{x^2-4}-x-4$$

$$D_{f-g}=(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$$

$$(f\cdot g)_{(x)}=(\sqrt{x^2-4})(x+4)$$

$$D_{f\cdot g}=(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)_{(x)}=\frac{\sqrt{x^2-4}}{x+4}$$

$$D_{f/g}=(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)-\{x \mid x+4=0\}$$

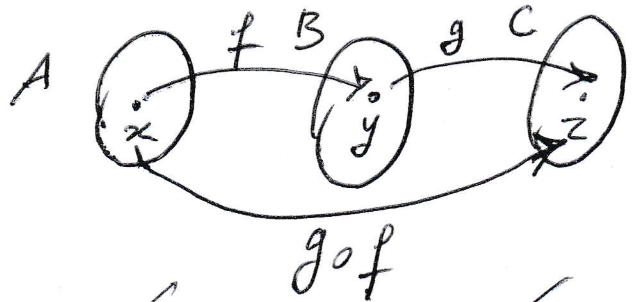
$$=(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)-\{-4\}$$

ص ۹۸

<u>ترکیب دو تابع:</u> فرض کنید $\begin{cases} f: A \to B \\ y = f(x) \end{cases}$ و $\begin{cases} g: B \to C \\ z = g(y) \end{cases}$ دو تابع باشند تابع h که به صورت زیر تعریف می‌شود را تابع مرکب f و g گویند.

$$h(x) = (g \circ f)_{(x)} = g(f(x))$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$



به طریق مشابه:

$$(f \circ g)_{(x)} = f(g(x))$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

نکته: تشکیل $(g \circ f)_{(x)}$ وقتی امکان پذیر است که $D_g \cap R_f \neq \phi$ باشد.

مثال: اگر $f(x) = \frac{1}{x}$ و $g(x) = \frac{x+1}{x-1}$ داریم:

$$D_f = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$D_g = \mathbb{R} - \{1\}$$

$$(f \circ g)_{(x)} = f(g(x)) = f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \frac{1}{\frac{x+1}{x-1}} = \frac{x-1}{x+1}$$

$$D_{f \circ g} = \left\{x \in \mathbb{R} - \{1\} \;\middle|\; \frac{x+1}{x-1} \in \mathbb{R} - \{0\}\right\}$$

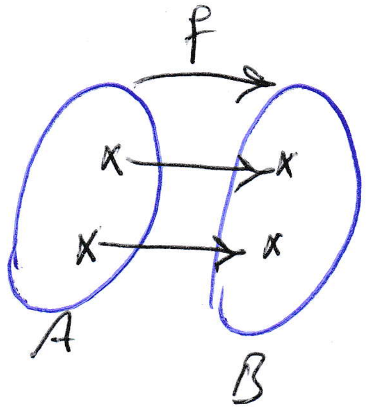
$$= \left\{x \neq 1 \;\middle|\; \frac{x+1}{x-1} \neq 0\right\}$$

$$= \{x \neq 1 \mid x \neq -1\}$$

$$\Rightarrow D_{f \circ g} = \mathbb{R} - \{1, -1\}$$

انواع توابع:

۱- تابع یک به یک: تابع



$$\begin{cases} f: A \to B \\ y = f(x) \end{cases}$$

را یک به یک گوییم هرگاه تصاویر دو عضو متمایز متعلق به A به وسیله f، دو عضو متمایز از B باشند. یعنی

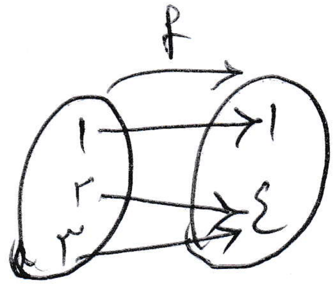
$$\forall x_1, x_2 \in A \qquad (x_1 \neq x_2) \Rightarrow (f(x_1) \neq f(x_2))$$

یا با استفاده از عکس نقیض در منطق می‌توان نتیجه گرفت:

$$\forall x_1, x_2 \in A \qquad (f(x_1) = f(x_2)) \Rightarrow (x_1 = x_2)$$

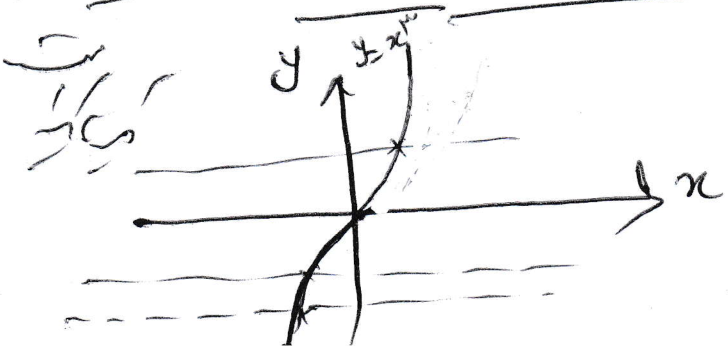
مثال: تابع $f = \{(1,1), (2,4), (3,4)\}$ یک به یک نمی‌باشد

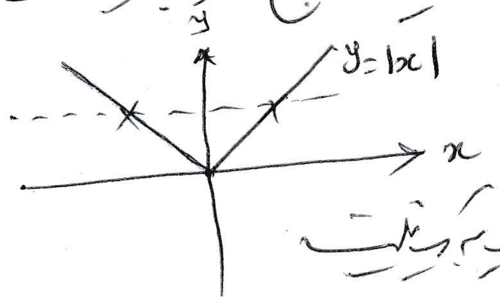
حل) تابع یک به یک نمی‌باشد چون



$$f(2) = f(3) = 4 \Longrightarrow 2 \neq 3$$

نکته: اگر نمودار تابع f را داشته باشیم و هر خط موازی محور x حداکثر منحنی را در یک نقطه قطع نماید آن تابع یک به یک است





مثال: تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ با ضابطه $f(x)=\sqrt[3]{2x+1}$ تابعی یک به یک است زیرا:

$\forall x_1,x_2\in\mathbb{R}\quad f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow \sqrt[3]{2x_1+1}=\sqrt[3]{2x_2+1}\Rightarrow$

$2x_1+1=2x_2+1\Rightarrow x_1=x_2$

مثال: تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ با ضابطه $f(x)=-2x^2+3$ تابعی یک به یک نیست زیرا:

$\forall x_1,x_2\in\mathbb{R}\quad f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow -2x_1^2+3=-2x_2^2+3\Rightarrow$

$-2x_1^2=-2x_2^2\Rightarrow x_1^2=x_2^2\Rightarrow x_1=\pm x_2$

۲- تابع معکوس: هرگاه در تابع f جای مؤلفه اول و دوم را عوض کنیم (در ازواج مرتب) رابطه جدیدی حاصل می‌شود که آن را معکوس رابطه قبلی می‌نامند و با f^{-1} نمایش می‌دهند.

لازم به یادآوری است که اگر f^{-1} تابع باشد این را تابع معکوس f می‌نامند.

نکته: معکوس هر تابع ممکن است تابع نباشد.

مثال: تابع $f=\{(1,2),(2,3),(3,2)\}$ معکوس f عبارت است از:

$f^{-1}=\{(2,1),(3,2),(2,3)\}$ که این رابطه جدید تابع نیست

یافتن ضابطه تابع معکوس: الف- ابتدا x را برحسب y محاسبه می‌کنیم.

ب- در رابطه جدید جای x و y را عوض می‌کنیم.

ج- برای y جدید نام $f^{-1}(x)$ اختیار می‌کنیم.

نکته: شرط معکوس‌پذیری تابع f یک به یک بودن آن است.

مثال: معکوس تابع $f(x)=2x^3+1$ را به دست آورید.

حل) اول می‌بایست یک به یک بودن آن را بررسی می‌نماییم:

$$\begin{cases} f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f(x)=2x^3+1 \end{cases}$$

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ $\quad f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow 2x_1^3+1=2x_2^3+1 \Rightarrow x_1^3=x_2^3$

$\Rightarrow x_1=x_2$ پس یک به یک است

حل معادله معکوس f:

$$y=2x^3+1 \Rightarrow 2x^3=y-1 \Rightarrow x^3=\frac{y-1}{2} \Rightarrow x=\sqrt[3]{\frac{y-1}{2}}$$

$$\Rightarrow y=\sqrt[3]{\frac{x-1}{2}} \Longrightarrow f^{-1}(x)=\sqrt[3]{\frac{x-1}{2}}$$

۳- تابع زوج و فرد:

تعریف: مجموعه A را متقارن گوییم هرگاه به ازای هر $x \in A$ داشته باشیم $-x \in A$.

مثال: مجموعه $A=[-2,2]$ متقارن است.

مجموعه $B=(-2,2]$ متقارن نیست.

تابع زوج: تابع $f(x)$ را زوج گوییم هرگاه:

الف) دامنه f متقارن باشد. $\quad$ الف) $\forall x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$

ب) به ازای هر $x \in D_f$ داشته باشیم: $\quad$ ب) $f(-x)=f(x)$

تابع فرد: تابع $f(x)$ را فرد گوئیم هرگاه:

الف) دامنه f متقارن باشد

ب) $f(-x)=-f(x)$ $\quad \forall x\in D_f$

مثال: $f(x)=x^2$ ؟

حل) الف) $D_f=\mathbb{R}$ متقارن است

ب) $f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$ $\quad \forall x\in\mathbb{R}$

f زوج است

مثال: $f(x)=\cos x$ ؟

حل) الف) $D_f=\mathbb{R}$ متقارن است

ب) $f(-x)=\cos(-x)=\cos x=f(x)$ $\quad \forall x\in D_f$

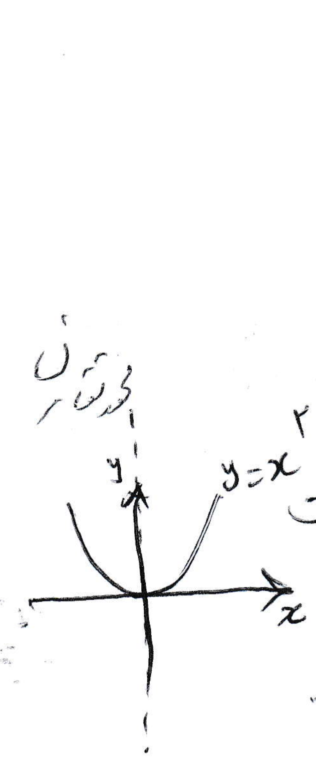
f زوج است

مثال: $f(x)=\sin x$

الف) $D_f=\mathbb{R}$ متقارن است

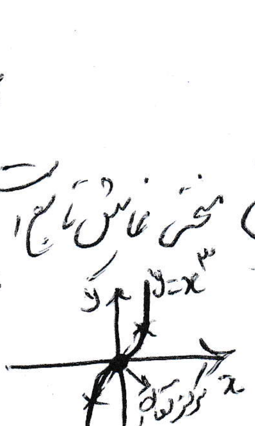
ب) $f(-x)=\sin(-x)=-\sin x=-f(x)$ $\quad \forall x\in\mathbb{R}$

f فرد است



نکته: الف) اگر $y=f(x)$ تابعی زوج باشد محور yها محور تقارن منحنی نمایش تابع است

ب) اگر $y=f(x)$ تابعی فرد باشد مبدأ مختصات مرکز تقارن منحنی نمایش تابع است



۴_ تابع صعودی تابع نزولی :

الف) تابع صعودی: تابع f را در بازه $[a,b]$ صعودی گوییم اگر:

$$\forall x_1 , x_2 \in [a,b] \quad ; \quad x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

یعنی با افزایش x مقدار y نیز افزایش می‌یابد

ب) تابع نزولی: تابع f را در بازه $[a,b]$ نزولی گوییم اگر:

$$\forall x_1 , x_2 \in [a,b] \quad ; \quad x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

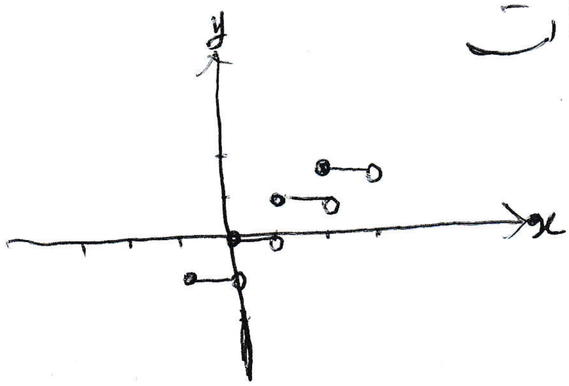
یعنی با افزایش x مقدار y نیز کاهش می‌یابد

نکته : ۱) اگر داشته باشیم $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ تابع را اکیداً صعودی گوییم

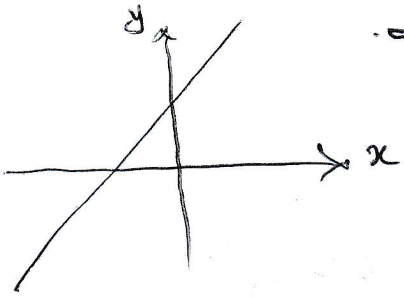
۲) " " $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ " " " نزولی گوییم.

نکته : اگر تابع f اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی باشد، تابع f را اکیداً یکنوا گوییم
_ یعنی که اکیداً یکنوا باشد، یک به یک است ولی عکس آن لزوماً درست نیست.

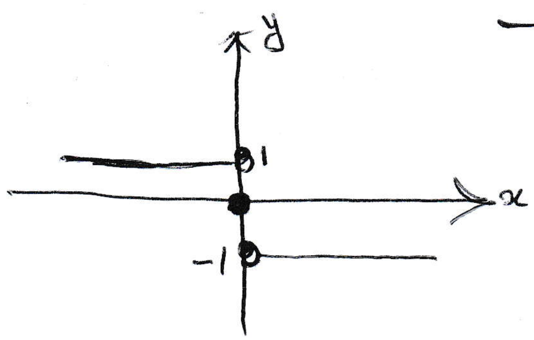
مثال: تابع $f(x)=[x]$ تابعی صعودی است



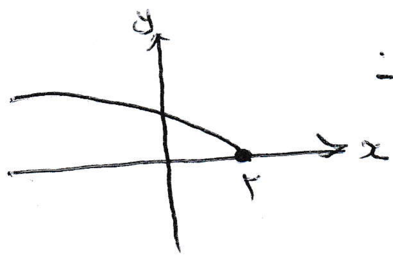
مثال: تابع $f(x)=2x+1$ اکیداً صعودی است.



مثال: تابع $f(x)=-\operatorname{sgn}(x)$ تابعی نزولی است



مثال: تابع $f(x)=\sqrt{2-x}$ اکیداً نزولی است.



مثال: تابع $f(x)=(x-1)^2$ در فاصله $(-\infty,1]$ اکیداً نزولی و در فاصله $[1,+\infty)$ اکیداً صعودی می‌باشد.

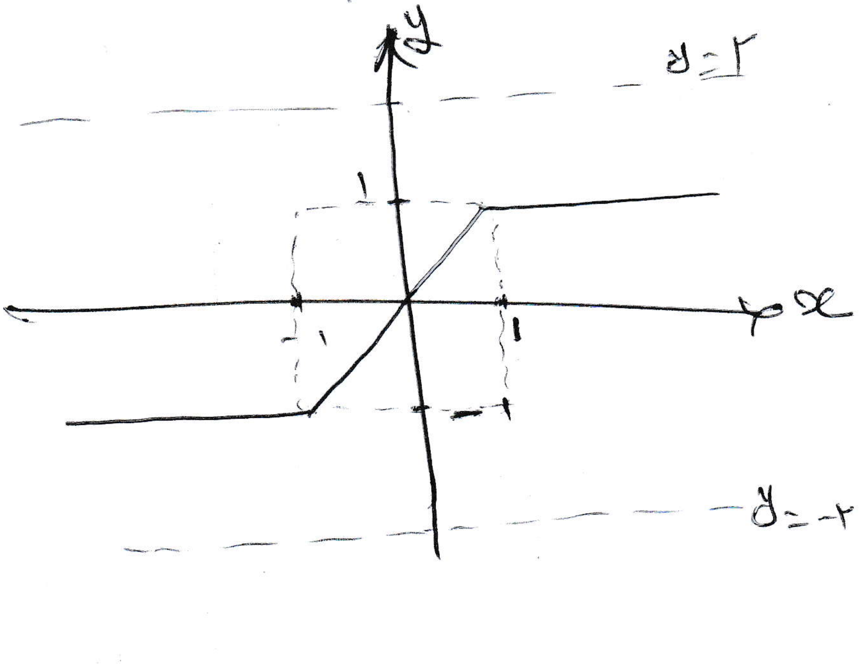
۵- تابع کراندار

تابع f را کراندار گوییم هرگاه عدد مثبتی مانند M وجود داشته باشد که به ازای هر $x \in D_f$ داشته باشیم:

$$|f(x)| \le M \quad \text{یا} \quad -M \le f(x) \le M$$

به عبارت دیگر f کراندار است اگر نمودار f بین دو خط $y=M$ و $y=-M$ قرار گرفته باشد. M کران بالا و $-M$ کران پایین گفته می‌شود.

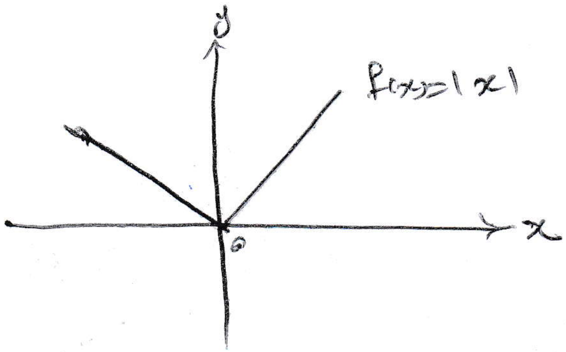
مثال: تابع
$$f(x) = \begin{cases} -1 & , x < -1 \\ x & , -1 \le x \le 1 \\ 1 & , x > 1 \end{cases}$$
تابعی کراندار است زیرا کافی است M را هر عدد حقیقی بزرگتر یا مساوی ۱ در نظر بگیریم. مثلاً $M = ۲$



۶- <u>تابع قدرمطلق</u> : $f(x)=|x|$ تابع قدرمطلق است و به صورت زیر تعریف می‌شود :

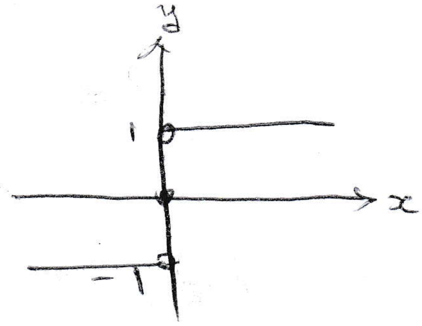
$$f(x)=\begin{cases} x & , \quad x\geq 0 \\ -x & , \quad x<0 \end{cases}$$

تابع زوج است و نسبت به محور y ها متقارن است



۷- <u>تابع علامت</u> : $f(x)=\mathrm{sgn}(x)$ تابع

$$\mathrm{sgn}(x)=\begin{cases} 1 & , \quad x>0 \\ 0 & , \quad x=0 \\ -1 & , \quad x<0 \end{cases}$$



۸- <u>تابع جزءصحیح</u> : تابع $f(x)=[x]$ تابع جزءصحیح است که به ازای $n\leq x<n+1$ آنگاه $[x]=n$ است.

$x=n+p \rightarrow 0\leq p<1$

مقدار صحیح

$\Rightarrow [x]=[n+p]=n \quad (*) \iff n\leq x<n+1$

$[۲,۷۵]=[۲+۰/۷۵]=۲$

$[-۱,۲۵]=[-۲+۰/۷۵]=-۲$

مثال: رسم $f(x)=[x]$ در بازه $[-۲,۲)$.

حل: در راستای نکته (*) داریم

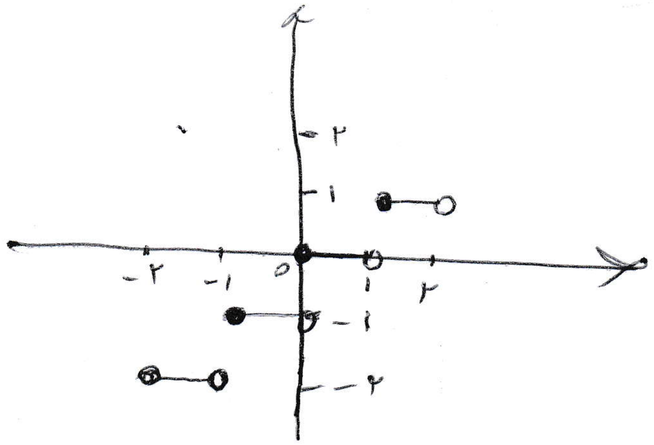
$-۲\leq x<-۱ \Rightarrow [x]=-۲ \Rightarrow f(x)=-۲$

$-۱\leq x<۰ \Rightarrow [x]=-۱ \Rightarrow f(x)=-۱$

$۰\leq x<۱ \Rightarrow [x]=۰ \Rightarrow f(x)=۰$

ص ۱۸

$1 \leq x < 2 \Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow f(x) = 1$



نکته:

۱) $[x] + [-x] = \begin{cases} -1 & , \quad x \notin Z \\ 0 & , \quad x \in Z \end{cases}$

۲) $0 \leq x - [x] < 1$

۳) $[x+n] = [x] + n \qquad n \in Z$

۴) $[x] \leq x < [x] + 1$

۵) $[-x] = \begin{cases} -x & x \in Z \\ -[x] - 1 & x \notin Z \end{cases}$

عدد حقیقی

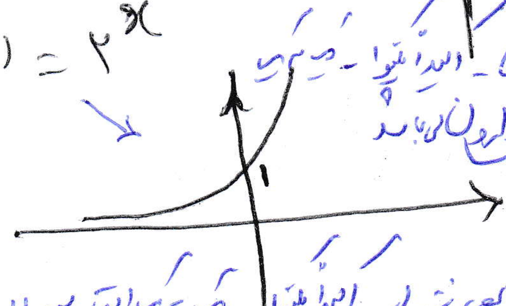
۹ـ تابع نمایی: هرگاه $a>0$ و $a \neq 1$ باشد تابع $f(x) = a^x$ را یک تابع نمایی گوییم

$\begin{cases} D_f = \mathbb{R} \\ R_f = (0, +\infty) \end{cases}$

① $a \neq 1 \,,\, 0 < a < 1 \Longrightarrow f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

② $a \neq 1$ و $a > 1 \Longrightarrow f(x) = 2^x$

تابع صعودی ـ اکیداً صعودی ـ یک به یک است پس دارای وارون می‌باشد



تابع نزولی ـ اکیداً نزولی ـ یک به یک است پس دارای وارون است

۱۰- تابع لگاریتمی : با توجه به تعریف وارون تابع ، وارون تابع نمایی ص ۱۸ تابع لگاریتمی می باشد

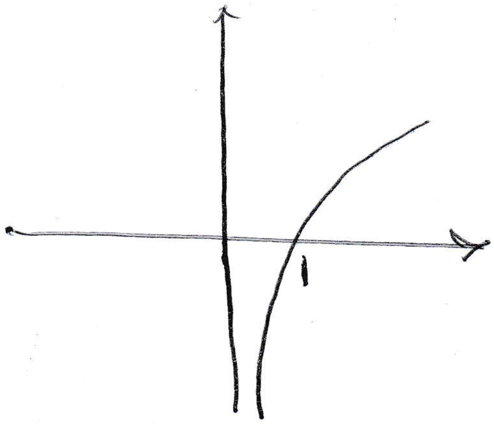
در نتیجه وارون تابع $f(x)=a^x$ تابع $f(x)=\log_a x$ می باشد $(a\neq 1,\ a>0)$

$$\begin{cases} D_f=(0,+\infty) \\ R_f=\mathbb{R} \end{cases}$$

$f(x)=\log_a x$

$a>1$

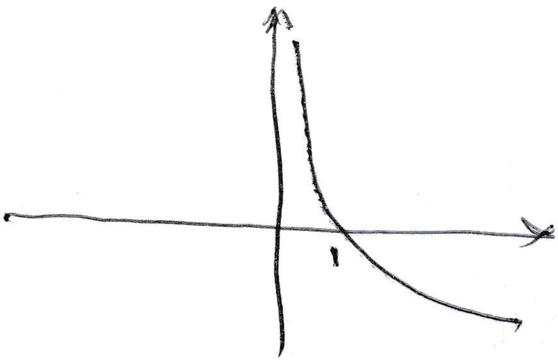
$a\neq 1$



$f(x)=\log_a x$

$0<a<1$

$a\neq 1$



نکته : f و f^{-1} نسبت به خط $y=x$ قرینه هم می باشند.

نکته : دامنه تابع $f(x)=\log_{h(x)} g(x)$ به صورت زیر تعریف می شود.

$$D_f=\{x \mid g(x)>0,\ h(x)>0,\ h(x)\neq 1\}$$

۱۱ - توابع مثلثاتی و معکوس آنها

الف) $f(x)=\sin x$

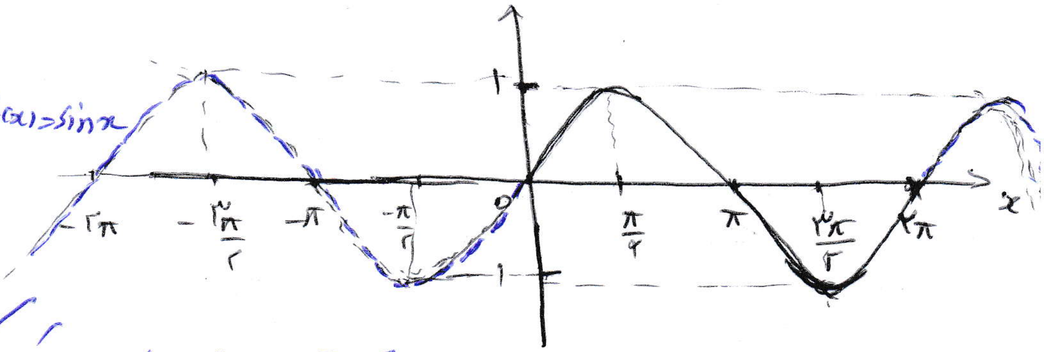
x	۰	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$f(x)$	۰	۱	۰	۱-	۰

$D_f=\mathbb{R}$

$R_f=[-1,1]$

$f(x)=\sin x$ تابعی فرد است

$f(-x)=\sin(-x)=-\sin x$

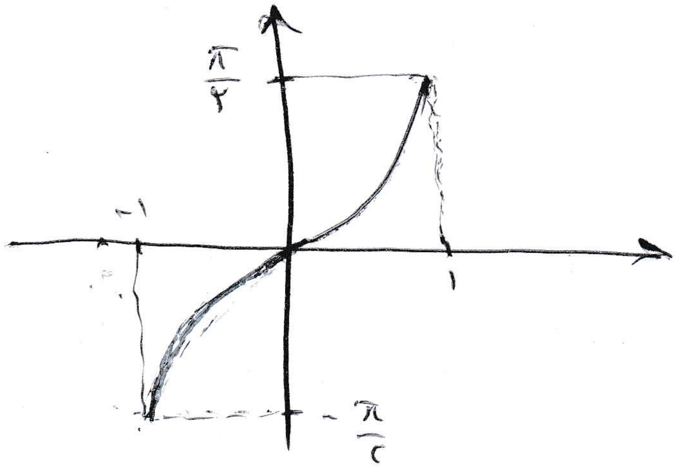


تابع $f(x)=\sin x$ در بازه $D_f=[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ و $R_f=[-1,1]$ یک به یک است و وارون پذیر است

$f^{-1}(x)=\operatorname{Arc}\sin x$

$D_{f^{-1}}=[-1,1]$

$R_{f^{-1}}=[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$



ب) $f(x)=\cos x$

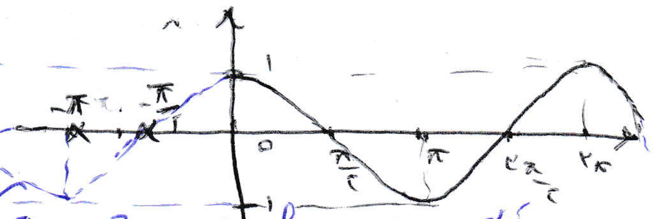
x	۰	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$f(x)$	۱	۰	۱-	۰	۱

$D_f=\mathbb{R}$

$R_f=[-1,1]$

$f(x)=\cos x$ تابعی زوج است

$f(-x)=\cos(-x)=\cos x$

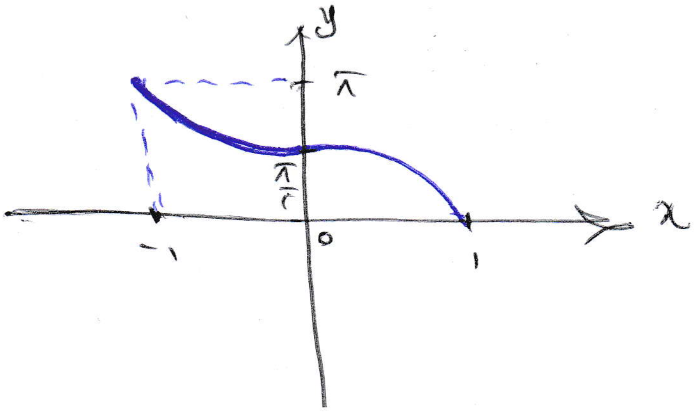


تابع $f(x)=\cos x$ در بازه $[0,\pi]$ یک به یک است لذا معکوس دارد

$f^{-1}(x)=\operatorname{Arc}\cos x$

$D_{f^{-1}}=[-1,1]$

$R_{f^{-1}}=[0,\pi]$



ه) $f(x)=\tan x$

$D_f=[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

$R_f=\mathbb{R}$

که یک به یک و پوشا است پس دارای وارون است

تابع فرد است

$\Rightarrow f^{-1}(x)=\mathrm{Arctan}\,x$

$D_{f^{-1}}=\mathbb{R}$

$R_{f^{-1}}=[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

د) $f(x)=\cot x$

$D_f=[0,\pi]$

$R_f=\mathbb{R}$

که یک به یک و پوشا است

پس دارای وارون است

$\Rightarrow f^{-1}(x)=\mathrm{Arc\,cot}\,x$

$D_{f^{-1}}=\mathbb{R}$

$R_{f^{-1}}=[0,\pi]$

۱۲- توابع هذلولی : هر تابع تعریف شده روی بازه $[-a,a]$ را می‌توانیم بصورت مجموع یک تابع زوج و یک تابع فرد در این بازه تجزیه کنیم.

$$f(x)=\underbrace{\frac{f(x)+f(-x)}{2}}_{\text{یک تابع زوج است}}+\underbrace{\frac{f(x)-f(-x)}{2}}_{\text{یک تابع فرد است}}$$

اکنون اگر تابع $f(x)=e^x$ روی $\mathbb{R}$ را در نظر بگیریم بخش زوج تابع e^x را کسینوس هذلولی x می‌نامیم و با $ch\,x$ نشان می‌دهیم و بخش فرد تابع e^x را سینوس هذلولی x می‌نامیم و با $sh\,x$ نشان می‌دهیم.

$$ch\,x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}\quad,\quad sh\,x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

همچنین داریم:

۱) $\operatorname{ch}x+\operatorname{sh}x=e^{x}$

۲) $\operatorname{ch}x-\operatorname{sh}x=e^{-x}$

۳) $\operatorname{ch}^2x-\operatorname{sh}^2x=1$

۴) $\operatorname{th}x=\frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x}=\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$

۵) $\coth x=\frac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{sh}x}=\frac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}-e^{-x}}$

ادامه مباحث توابع هذلولی جزء الزامات این فصل نمی‌باشد برای یادگیری بیشتر می‌توانید به ریاضی عمومی (۱) مراجعه نمایید.

مسایل حل شده:

۱- دامنه توابع زیر را بدست آورید:

الف) $f(x)=\sqrt{x-x\sqrt{x}}$

حل) $\begin{cases} x-x\sqrt{x}\geq 0 \\ x\geq 0 \end{cases} \Rightarrow x\sqrt{x}\leq x \Rightarrow \sqrt{x}\leq 1 \Rightarrow 0\leq x\leq 1$

$\Rightarrow D_f=[0,1]$

ب) $f(x)=\frac{\cos x}{1+\sin 2x}$

حل) $1+\sin 2x\neq 0 \Rightarrow \sin 2x\neq -1 \Rightarrow 2x\neq \frac{3\pi}{2},\frac{7\pi}{2},\frac{11\pi}{2},\ldots$

$2x\neq 2k\pi-\frac{\pi}{2} \Rightarrow x\neq k\pi-\frac{\pi}{4}$

$D_f=\{x \mid x\neq k\pi-\frac{\pi}{4}\}$

ج) $f(x)=\log_{x}(x^2-4)$

حل)
$$\begin{cases} x>0 \\ x\neq 1 \\ x^2-4>0 \Rightarrow x^2>4 \Rightarrow \begin{cases} x>2 \\ \text{یا} \\ x<-2 \end{cases} \end{cases} \xrightarrow{\cap} x>2$$

$D_f=(2,+\infty)$

د) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-|x|}}$

حل) $x-|x|>0 \Rightarrow x>|x| \Rightarrow x\in\varnothing$

$D_f=\varnothing$

ه) $f(x)=\log(x+2)+\log(x-2)$

حل)
$$\begin{cases} x+2>0 \Rightarrow x>-2 \\ x-2>0 \Rightarrow x>2 \end{cases} \xrightarrow{\cap} x>2$$

$D_f=(2,+\infty)$

۲- زوج و فرد بودن توابع زیر را بررسی نمایید.

الف) $f(x)=\log\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$

I) $\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\geq 0 \xrightarrow{1+x^2>0} 1-x^2\geq 0 \Rightarrow x^2\leq 1 \Rightarrow -1\leq x\leq 1$

$D_f=[-1,1]$ متقارن است

II) $f(-x)=\log\dfrac{1-(-x)^2}{1+(-x)^2}=\log\dfrac{1-x^2}{1+x^2}=f(x)$

تابع f زوج است.

صفحه ۲۴

ج) $y=\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{2-x}$

I) $D_f=\mathbb{R}$ متقارن است

II) $f(-x)=\sqrt[3]{-x+2}-\sqrt[3]{2-(-x)}=\sqrt[3]{2-x}-\sqrt[3]{2+x}$

$=-\left(\sqrt[3]{2+x}-\sqrt[3]{2-x}\right)$

$=-f(x)$

f فرد است

۳- یکنوایی توابع زیر را بررسی نمایید

الف) $f(x)=|x|+2 \qquad x\in[0,+\infty)$

حل) $\forall x_1<x_2 \xrightarrow{x_1,x_2\in[0,+\infty)} |x_1|<|x_2| \Rightarrow |x_1|+2<|x_2|+2$

$\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$

در نتیجه f اکیداً صعودی است.

ب) $f(x)=x^2-2x+3 \qquad x\in(-\infty,+\infty)$

$\forall x_1<x_2$

به عنوان مثال اگر $x_1=-1\ ,\ x_2=2$

$\Rightarrow f(x_1)=f(-1)=1+2+3=6 < f(x_2)=f(2)=4-4+3$

پس f اکیداً صعودی نیست

اگر $x_1=2$ و $x_2=3$

$\Rightarrow f(x_1)=2^2-4+3=3 > f(x_2)=f(3)=9-6+3=6$

پس f اکیداً نزولی نیست.

در نتیجه f نه صعودی است و نه نزولی.

۴- اگر $f\left(\frac{x+2}{1-x}\right)=x^2-x+1$ باشد آنگاه $f(x)$ را بدست آورید.

حل

$$\frac{x+2}{1-x}=t \Rightarrow x+2=t-tx \Rightarrow x+tx=t-2 \Rightarrow x(1+t)=t-2$$

$$\Rightarrow x=\frac{t-2}{1+t}$$

$$f(t)=\left(\frac{t-2}{1+t}\right)^2-\left(\frac{t-2}{1+t}\right)+1=\frac{t^2-4t+4}{(1+t)^2}-\frac{t-2}{1+t}+1$$

$$\Rightarrow f(t)=\frac{t^2-4t+4-t^2+t+2+t^2+2t+1}{(1+t)^2}=\frac{t^2-t+7}{(1+t)^2}$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{t^2-t+7}{(1+t)^2}$$

۵- اگر $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^3+\frac{1}{x^3}$ باشد $f\left(\frac{1}{x}\right)$ را معین کنید.

حل)

$$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3x\left(\frac{1}{x}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)$$

$$=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)$$

$$x+\frac{1}{x}=\frac{1}{t} \Rightarrow f\left(\frac{1}{t}\right)=\left(\frac{1}{t}\right)^3-3\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{1}{t^3}-\frac{3}{t}$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{1-3t^2}{t^3}$$

درنتیجه

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\left(\frac{1}{x}\right)^3-3\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1-3x^2}{x^3}$$

پسرم برای استفاده بیشتر از این فصل (تابع) و حل تمرین‌ها به کتاب ریاضی عمومی (۱) تألیف ... مراجعه نمایید

باسمه تعالی

فصل حد و پیوستگی ۱

۱- حد توابع : حد یکی از مفاهیم بسیار دقیق ریاضی است که در فراگیری ریاضیات به کرات با آن سر و کار داریم.

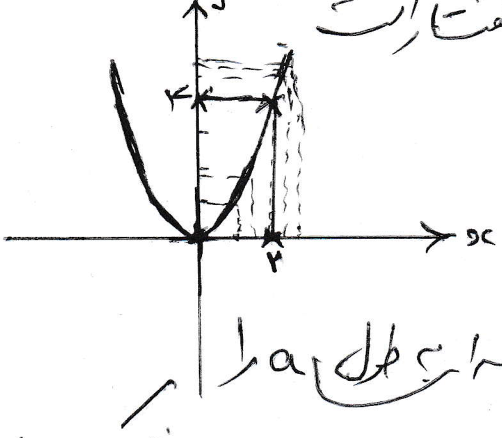
تعریف شهودی و هندسی حد: در واقع نوعی میل کردن است.

مثال: تابع $f(x)=x^2$ را در نظر بگیرید و فرض کنید $x=2$ عدد مفروض باشد. حال اگر x واقعاً بر محور xها به نحو دلخواه به ۲ نزدیک شود آنگاه مشاهده می‌کنیم که $f(x)=x^2$ به عدد ۴ نزدیک می‌گردد.

x	$f(x)=x^2$
۱٫۹	۳٫۶۱
۱٫۹۹	۳٫۹۶۰۱
۱٫۹۹۹	۳٫۹۹۶۰۰۱
۱٫۹۹۹۹	۳٫۹۹۹۶۰۰۰۱
⋮	

x	$f(x)=x^2$
۲٫۱	۴٫۴۱
۲٫۰۱	۴٫۰۴۰۱
۲٫۰۰۱	۴٫۰۰۴۰۰۱
۲٫۰۰۰۱	۴٫۰۰۰۴۰۰۰۱
⋮	⋮

مشاهده می‌کنیم که هرچه x از طرف چپ و راست به $x=2$ نزدیک‌تر شود $f(x)=x^2$ به عدد ۴ نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود. نمودار زیر مؤید این مطلب است.



دقیق
مقدمه حد!

بررسی رفتار تابع در اطراف نقطه‌ای مثل a را حد می‌نامیم. حد چپ یعنی x از سمت چپ به a نزدیک می‌شود ($x \to a^-$)، حد راست یعنی x از سمت راست به a نزدیک می‌شود ($x \to a^+$).

صفحه ۲۷

همسایگی: عدد حقیقی a را در نظر بگیرید. مجموعه اعداد حقیقی x که در بازه $(a-\delta, a+\delta)$ ، $\delta>0$ وجود دارند، را همسایگی به مرکز a و به شعاع δ گویند.

تعریف ریاضی حد: با توجه به تعریف همسایگی، گوییم تابع $y=f(x)$ در نقطه $x=a$ دارای حد L است اگر به ازای هر عدد مثبت ε عددی مثبت مانند δ موجود باشد به طوری که اگر $0<|x-a|<\delta$ آنگاه $|f(x)-L|<\varepsilon$ باشد. به عبارت دیگر:

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists \delta>0,\quad 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$$

و آن را می‌نویسیم:

$$\lim_{x\to a} f(x)=L$$

مثال: فرض کنید $f(x)=4x-1$. اگر $\lim_{x\to 3} f(x)=11$ باشد، عدد (δ) را برای $\varepsilon=0.01$ بیابید.

$$|f(x)-L|=|4x-1-11|=|4x-12|=4|x-3|<0.01$$

$$\Downarrow$$

$$|x-3|<\underbrace{0.0025}_{\delta}$$

پس $\delta=0.0025$.

قضایای حد:

حد تابع چندجمله‌ای در نقطه x_0 برابر است با مقدار تابع در نقطه x_0.

تابع ثابت باشد

1) $f(x)=k \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)=k$

تابع همانی

2) $f(x)=x \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} x = x_0$

ترکیب خطی

3) $f(x)=ax+b \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)=ax_0+b$

مثال:

$$\lim_{x\to 2}\left(f(x)=3x^3-2x^2+x-1\right)=3(2)^3-2(2)^2+2-1$$
$$=24-8+2-1=17$$

ادامه قضایای حد:

۴) $\lim\limits_{x\to x_0} k\cdot f(x)=k\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ ، (k عدد ثابت)

۵) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\right)^n=\left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right)^n$ ، $n\in\mathbb{R}^+$

۶) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\pm g(x)\right)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

۷) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\,\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

۸) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$ ، $\left(\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\neq 0\right)$

قضیه فشردگی (ساندویچ): هرگاه $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$ و $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=L$ و به ازای هر x واقع در بازه‌ای شامل x_0 احتمالاً به جز x_0 داشته باشیم (در همسایگی محذوف x_0 ($x=x_0$)) $f(x)\leq h(x)\leq g(x)$ ، آنگاه $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=L$.

مثال: (کاربرد مهم‌ترین مثال برای قضیه فوق)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$
(اثبات در کتاب موجود می‌باشد)

نکته: در محاسبه حدود بسیار اوقات از عبارات معادل استفاده می‌کنیم. هرگاه هر یک از حدود $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\neq 0$ موجود بوده و $L\neq 0$ ، $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=L$ ، آنگاه گوییم $f(x)$ با $L\,g(x)$ در حوالی نقطه x_0 معادل است و در محاسبات مربوط به حدود هر جا نیاز باشد به جای $f(x)$ مقدار $L\,g(x)$ را جایگزین می‌کنیم.

مثال: (در رابطه با قضیه فشردگی): حاصل حد مقابل را بدست آورید:

$$\lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x}$$

حل) در مبحث دنباله‌ها کمک قضیه‌ای می‌توان مثال فوق را حل نمود به این صورت که حد $\sin\frac{1}{x}$ در $x=0$ تعریف نشده است و حد x^2 در $x=0$ برابر صفر می‌باشد لذا این عبارت با توجه به قضیه حد حاصلضرب مقدارش برابر صفر می‌باشد. ولی در اینجا با توجه به قضیه فشردگی می‌توان حلش نمود:

می‌دانیم که $x \neq 0 \longrightarrow -1 \leq \sin\frac{1}{x} \leq 1$

با توجه به $x \neq 0 \longrightarrow x^2 > 0$

ضرب طرفین نامساوی در x^2 $\longrightarrow -x^2 \leq x^2\sin\frac{1}{x} \leq x^2$

با توجه به قضیه فشردگی:

$$\underbrace{-x^2}_{f(x)} \leq \underbrace{x^2\sin\frac{1}{x}}_{h(x)} \leq \underbrace{x^2}_{g(x)}$$

$\checkmark$ $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}(-x^2) = 0$

$\checkmark$ $\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0}(x^2) = 0$

با توجه به فرض و برقرار بودن شرط فشردگی $\longrightarrow \lim_{x\to 0} h(x) = 0$

لذا

$$\lim_{x\to 0} x^2\sin\frac{1}{x} = 0$$

برای روشن شدن مطلب به مثال‌های زیر توجه کنید (الامام رضا ۲۸)

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x}{x} = 2$

یا بهتر بگوییم $\sin 2x$ معادل $2x$ است

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan^3 3x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^3 3x}{x^2 \cos^3 3x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\cos^2 3x} \cdot \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 3x}{x^2}$

$= 1 * \lim \dfrac{\sin^2 3x}{x^2}$

$= \lim \dfrac{(3x)^2}{x^2} = 9$

در حل می‌توان گفت برای حل کردن مسائل اینچنینی از قاعده هم‌ارزی (یا همان معادل) استفاده می‌کنیم.

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{x} = 1$

یعنی $\begin{cases} \sin x \sim x \\ x \to 0 \end{cases}$

در حالت کلی:

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin kx}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{kx}{x} = k$

یعنی $\begin{cases} x \to 0 \\ kx \to 0 \\ \sin kx \sim kx \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan kx}{x} = k$

$\begin{cases} x \to 0 \\ kx \to 0 \\ \tan kx \sim kx \end{cases}$

ص ۳۱

مثال: حدها زیر را محاسبه نمایید:

۱) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{4x} \approx \lim_{x\to 0} \frac{3x}{4x} = \frac{3}{4}$

۲) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\sin 4x} = \lim_{x\to 0} \frac{3x}{4x} = \frac{3}{4}$

۳) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan 2x}{\tan 7x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{7x} = \frac{2}{7}$

۴) $\lim_{x\to 0} \frac{\cot 3x}{\cot 5x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\tan 3x}}{\frac{1}{\tan 5x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\tan 5x}{\tan 3x} = \lim_{x\to 0} \frac{5x}{3x} = \frac{5}{3}$

۵) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\left(\frac{x}{2}\right)^2}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2x} = \frac{0}{2} = 0$

— دقت داشته باشید که در مبحث ۵ از این مطلب دوباره یادآوری خواهد شد که در اینجا برای روشن شدن مثال که در صفحه قبل چند مثال را تذکر دادیم.

ملاحظه کردیم که $\lim_{x\to a^-} f(x)$ را حد چپ گویند و $\lim_{x\to a^+} f(x)$ را حد راست گویند و شرط حد برابری دو حد فوق می‌باشد.

حد راست یعنی $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$

حد چپ $\lim_{x\to a^-} f(x) = L'$

$\xrightarrow[\text{تابع } (f(x))]{\text{شرط حد}}$ $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x)$

$L = L'$

مثال: مقادیر a و b را چنان تعیین نمایید که تابع
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & , x \le -2 \\ ax+b & , -2 < x < 2 \\ 2x-6 & , x \ge 2 \end{cases}$$
در نقاط $x = 2$ و $x = -2$ دارای حد باشد.

ص ۳۲

حل) حد در نقطه $x=2$

حد راست $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} (2x-6) = -2$

حد چپ $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (ax+b) = 2a+b$

شرط وجود حد در نقطه $x=2$: $\boxed{2a+b=-2}$ (۱)

حد در نقطه $x=-2$

حد راست $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^+} (ax+b) = -2a+b$

حد چپ $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^-} (x^2) = 4$

شرط وجود حد در نقطه $x=-2$: $\boxed{-2a+b=4}$ (۲)

از (۱) و (۲) $\Longrightarrow \begin{cases} 2a+b=-2 \\ -2a+b=4 \end{cases}$

$$2b=2$$

$$\boxed{b=1}$$

$$\Rightarrow a=-\frac{3}{2}$$

نکته: هرگاه حد تابع در یک نقطه به صورت $\frac{0}{0}$ درآید آن را مبهم نامیده و می‌توان به روش زیر این ابهام را برطرف نمود.

مثال) حدهای زیر را بیابید

1) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{1^2-1}{1-1} = \frac{0}{0}$ مبهم

حل) برای سهولت از روش تجزیه استفاده می‌کنیم (چرا؟) وقتی $x \to 1$ (x به سمت ۱) میل می‌کند مقادیر x به عدد ۱ بسیار نزدیک می‌شوند ولی $x=1$ را هرگز اختیار نمی‌کند بنابراین $x-1$ غیر صفر است و در نزدیکی $x=1$ دو تابع $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$ و $g(x)=x+1$ مساوی هستند لذا می‌توان $(x-1)$ را به صورت زیر ساده نمود:

برای رفع ابهام

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}} = \lim_{x\to 1} (x+1) = 2$$

2) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3+x-2}{x^2-1} = \frac{1^3+1-2}{1^2-1} = \frac{0}{0}$ مبهم

حل) برای رفع ابهام

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x^2+x+2)}{\cancel{(x-1)}(x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2+x+2}{x+1} = \frac{4}{2} = 2$$

3) $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x^2-4}{x^3+8} = \frac{0}{0}$ مبهم

حل) برای رفع ابهام

$$= \lim_{x\to -2} \frac{\cancel{(x+2)}(x-2)}{\cancel{(x+2)}(x^2-2x+4)} = \lim_{x\to -2} \frac{x-2}{x^2-2x+4} = -\frac{4}{12} = -\frac{1}{3}$$

۴) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \dfrac{0}{0}$

حل) برای اینکه عامل صفر کننده صورت و مخرج یعنی $x-4$ را پیدا کرده و حذف نماییم صورت و مخرج را در مزدوج صورت ضرب می‌کنیم مانند حالت ۳:

$$= \lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} \times \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2} = \lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}^2 - 2^2}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}$$

$$= \lim_{x\to 4} \frac{\cancel{(x-4)}}{\cancel{(x-4)}(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x\to 4} \frac{1}{\sqrt{x}+2} = \frac{1}{4}$$

۵) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{\sqrt[3]{x}-1} = \dfrac{0}{0}$

اتحاد چاق و لاغر

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(\sqrt[3]{x}-1)} \times \frac{(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}{(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}{\cancel{(x-1)}} = \lim_{x\to 1}(x+1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)$$

$$= 2 \times 3 = 6$$

قضیه ۹ - برای هر عدد حقیقی x_0 خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0 \qquad \lim_{x\to x_0} \cos x = \cos x_0$$

مثال)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} (2\cos x - 3\sin x) = 2\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}(\cos x) - 3\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}(\sin x)$$

$$= 2\cos\frac{\pi}{6} - 3\sin\frac{\pi}{6} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 3\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \sqrt{3} - \frac{3}{2}$$

قضیه ۱۰ـ هرگاه x بر حسب رادیان باشد داریم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

[(در صفحات قبل توضیح داده شده ـ لطفاً از قضیه استفاده شود)]

[و چون در مورد مبحث حد مثلثات صحبت می‌نماییم نیاز است که قضیه فوق دوباره توضیح داده شود]

مثال: حدهای زیر را محاسبه نمایید.

1) $\lim_{t\to 2}\frac{\sin(t-2)}{(t-2)} = \frac{0}{0}$ مبهم

(رفع ابهام) $x = t - 2$

وقتی $t \to 2$

آنگاه $x \to 0$

$$\Rightarrow \lim_{t\to 2}\frac{\sin x}{x} \overset{\text{طبق قضیه فوق}}{=} 1$$

با توجه به این نکته مثال ۲ هم حل بشود صحیح نمی‌باشد که روش توضیح هم ارزی بیان شود

2) $\lim_{t\to 0}\frac{\sin 5t}{3t} = \frac{0}{0}$ مبهم

روش هم ارزی (برای رفع ابهام)

$t \to 0$

$5t \to 0$

$$\Rightarrow \lim_{t\to 0}\frac{5t}{3t} = \frac{5}{3}$$

نتایج قضیه ۷ ، ۱

۱) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sin x} = 1$

۲) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x} = 1$

۳) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\tan x} = 1$

۴) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(mx)}{nx} = \dfrac{m}{n}$

۵) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{nx}{\sin(mx)} = \dfrac{n}{m}$

۶) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(mx)}{\sin(nx)} = \dfrac{m}{n}$

۷) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(nx)}{\sin(mx)} = \dfrac{n}{m}$

۸) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(mx)}{\tan(nx)} = \dfrac{m}{n}$

مثال) حاصل حد را بدست آورید:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin bx - \sin ax}{bx - ax} = \frac{0}{0} \qquad (b \neq a)$$

حل:

(حل از برای فرمولها)

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin bx}{bx - ax} - \frac{\sin ax}{bx - ax} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin bx}{(b-a)x} - \lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{(b-a)x}$$

طبق نتایج

$$\frac{b}{b-a} - \frac{a}{b-a} = \frac{b-a}{b-a} = 1$$

مثال ۱) : هرگاه تابع $f(x)$ به گونه‌ای باشد که برای هر x داشته باشیم: $|f(x)+5| \le (x-1)^2$ مقدار $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ را محاسبه نمایید.

حل)

طبق خواص قدر مطلق: $-(x-1)^2 \le f(x)+5 \le (x-1)^2$

طبق قضیه ساندویچ: $\underbrace{-(x-1)^2-5}_{g(x)} \le f(x) \le \underbrace{(x-1)^2-5}_{h(x)}$

$$\lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1}\left[-(x-1)^2-5\right] = -5$$

$$\lim_{x\to 1} h(x) = \lim_{x\to 1}\left[(x-1)^2-5\right] = -5$$

$$\xrightarrow{\text{طبق قضیه ساندویچ}} \lim_{x\to 1} f(x) = -5$$

مثال ۲) : حد چپ و حد راست و حد تابع زیر را در صورت وجود در نقاط داده شده به دست آورید.

الف) $f(x) = \dfrac{|x|}{x} \quad , x \in \mathbb{R}-\{0\}$

در $x=0$

حل)

حد راست: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{|x|}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{x} = 1$

حد چپ: $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{|x|}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{-x}{x} = -1$

$\Longrightarrow$ حد چپ $\neq$ حد راست ؛ پس تابع $f(x)$ در $x=0$ دارای حد نمی‌باشد.

ب) $f(x) = \begin{cases} -x & , x<1 \\ 1+x^2 & , x\ge 1 \end{cases}$

در نقطه $x=1$

تمرین صفحه ۳۸

حد را

ج) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}(1+x^2) = 2$

حد چپ $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}(-x) = -1$

$\Rightarrow$ حد چپ $\neq$ حد راست

پس تابع حد ندارد

مثال ۳) حدهای زیر را بدست آورید.

الف) $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{[x]+2}{3-x}$

حل) x از سمت چپ به ۲ نزدیک می‌شود پس $1<x<2$ که $[x]=1$ پس:

$$\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{[x]+2}{3-x} = \lim\limits_{x\to 2^-} \frac{1+2}{3-x} = \lim\limits_{x\to 2^-} \frac{3}{3-x} = \frac{3}{3-2} = 3$$

ب) $\lim\limits_{x\to 4^-} \dfrac{x-1}{[x]-3}$

حل) x از سمت چپ به ۴ نزدیک می‌شود پس $3<x<4$ که $[x]=3$ پس:

$$= \lim\limits_{x\to 4^-} \frac{x-1}{3-3} = \lim\limits_{x\to 4^-} \frac{x-1}{0} =$$ حد موجود نیست

ج) $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{|x-2|}{x^2-4}$

حل) طبق تعریف قدرمطلق تابع:

$$|x-2| = \begin{cases} (x-2), & x\geq 2 \\ -(x-2), & x<2 \end{cases}$$

$$= \lim\limits_{x\to 2^-} \frac{-(x-2)}{x^2-4} = \frac{0}{0} \xrightarrow[\text{ابهام}]{\text{برای رفع}} \lim\limits_{x\to 2^-} \frac{-\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(x+2)} = \lim\limits_{x\to 2^-} \frac{-1}{x+2} = -\frac{1}{4}$$

۷) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2x-|x|}{[x+1]-x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2x-|x|}{[x]+1-x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2x-x}{1-x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{1-x}$

$= \dfrac{0}{1} = 0$

$|x| = \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ -x & , x < 0 \end{cases}$

و

$\lim\limits_{x\to 0^+} [x] = 0 \qquad 0 < x < 1$

مثال ۴) در تابع زیر مقادیر a و b را چنان پیدا کنید که حد چپ و حد راست در نقطه $x=2$ به ترتیب ۳ و ۵ باشد.

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 2bx & , x > 2 \\ 2ax - 3b & , x \leq 2 \end{cases}$$

حل:

حد راست: $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} (ax^2+2bx) = 4a+4b = 5$

حد چپ: $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (2ax-3b) = 4a-3b = 3$

$$-\begin{cases} 4a+4b=5 \\ 4a-3b=3 \end{cases}$$

$7b = 2$

$\boxed{b = \dfrac{2}{7}}$

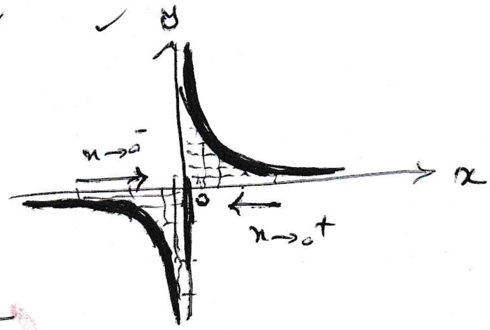
$\Rightarrow 4a - \dfrac{6}{7} = 3$

$4a = 3 + \dfrac{6}{7} \rightarrow 4a = \dfrac{27}{7}$

$\boxed{a = \dfrac{27}{28}}$

تعیین حد : الف) حدهای نامتناهی : ابتدا در چند مثال مفهوم لغت حدهای
که نامتناهی را با شکل توضیح می‌دهیم .

1) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x}$



حد راست $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty = \frac{1}{0^+}$

حد چپ $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = -\infty = \frac{1}{0^-}$

هنگامی که مقادیر x از سمت راست به صفر نزدیک می‌شوند مقادیر $f(x)$ به طور بیکران افزایش می‌یابد ،
" " " " سمت چپ " " " " " " " " بیکران کاهش می‌یابد .

۲) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$

حد راست $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{(0^+)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

حد چپ $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x^2} = \lim \frac{1}{(0^-)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

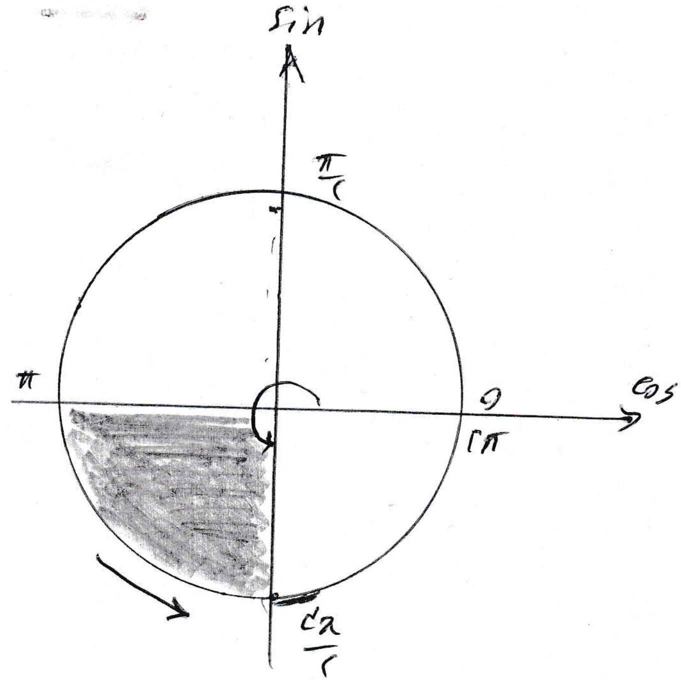
۳) $\lim\limits_{x \to 3^-} \frac{2x}{x-3} = \frac{2(3)}{0^-} = -\infty$

۴) $\lim\limits_{x \to -2^-} \frac{x+4}{x^2-4} = \frac{2}{0^+} = +\infty$

۵) $\lim\limits_{\theta \to \frac{3\pi}{2}^-} \tan\theta$

$$= \lim\limits_{\theta \to \frac{3\pi}{2}^-} \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\lim\limits_{\theta \to \frac{3\pi}{2}^-} \sin\theta}{\lim\limits_{\theta \to \frac{3\pi}{2}^-} \cos\theta}$$

$$= \frac{-1}{0^-} = +\infty$$



ب) حد در بی‌نهایت، با ذکر چند مثال توضیح می‌دهیم.

۱) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$

۲) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$

۳) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2}{x^2} = 0$

۴) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-3}{x^4} = 0$

تعمیم: هرگاه $n \in \mathbb{N}$ داریم:

$$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

ج) حدود نامتناهی در بی‌نهایت، با ذکر مثال:

۱) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$

۲) $\lim\limits_{x \to -\infty} 5x = -\infty$

۳) $\lim\limits_{x \to +\infty} (-2x^2) = -\infty$

۴) $\lim\limits_{x \to -\infty} 3x^2 = +\infty$

قضیه: هرگاه n یک عدد طبیعی باشد، آنگاه داریم:

الف) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$

ب) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & n \text{ زوج} \\ -\infty & n \text{ فرد} \end{cases}$

چند مثال به کمک قضیه فوق:

۱) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2+2x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 + \lim\limits_{x\to+\infty} 2x = (+\infty)+(+\infty) = +\infty$

۲) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2-2x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 - \lim\limits_{x\to+\infty} 2x = (+\infty)-(+\infty)$ (مبهم)

برای رفع ابهام مثال ۲:

رفع ابهام: $= \lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(1-\frac{2}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 \times \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)$

$= (+\infty) \times (1-0) = +\infty$

۳) $\lim\limits_{x\to-\infty} (-4x^3+3x-5) = \lim\limits_{x\to-\infty} (-4x^3) + \lim\limits_{x\to-\infty} (3x) - \lim\limits_{x\to-\infty} 5$

$= (+\infty) + (-\infty) + 5$

$= (+\infty) + (-\infty)$ مبهم

برای رفع ابهام: $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3\left(-4+\frac{3}{x^2}-\frac{5}{x^3}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}(x^3) \times \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-4+\frac{3}{x^2}-\frac{5}{x^3}\right)$

$= (-\infty) \times (-4+0-0)$

$= (-\infty) \times (-4) = +\infty$

نتیجه: هرگاه $f(x)$ و $g(x)$ چندجمله‌ای هایی به ترتیب از درجه n و m باشند داریم:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n}{b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_mx^m}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_nx^n}{b_mx^m}$$

$$=\begin{cases}+\infty \text{ یا } -\infty & ، \quad n>m\\[2mm] \dfrac{a_n}{b_m} & ، \quad n=m\\[2mm] 0 & ، \quad n<m\end{cases}$$

مثال) حدهای زیر را محاسبه نمایید:

الف) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+4}}{x+4}=\frac{+\infty}{-\infty}$ مبهم!

حل) برای رفع ابهام:

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{4}{x^2}\right)}}{x\left(1+\frac{4}{x}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}{x\left(1+\frac{4}{x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\cancel{x}\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}{\cancel{x}\left(1+\frac{4}{x}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}{1+\frac{4}{x}}=\frac{-\sqrt{1+0}}{1+0}=-1$$

ب) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{5-\sqrt{4x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}-3}=\frac{-\infty}{+\infty}$ (مبهم)

حل: برای رفع ابهام:

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{5-\sqrt{x^2\left(4+\frac{1}{x^2}\right)}}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}-3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5-|x|\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-3}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{5-x\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\left(\frac{5}{x}-\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}\right)}{\cancel{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\frac{3}{x}\right)}=\frac{0-\sqrt{4+0}}{\sqrt{1+0}-0}=-2$$

صفحه ۴۵

ج) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x})-\lim\limits_{x\to+\infty}(x)=\boxed{(+\infty)-(+\infty)}$ مبهم

(حل برای رفع ابهام) $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+x}-x}{1}\times\dfrac{\sqrt{x^2+x}+x}{\sqrt{x^2+x}+x}$

در مخرج مشترک ... مبهم

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cancel{x^2}+x-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+x}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}=\dfrac{+\infty}{+\infty}$ مبهم است

برای رفع ابهام $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x})}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}+x}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}=\dfrac{1}{\sqrt{1+0}+1}=\dfrac{1}{2}$

د) $\lim\limits_{x\to-2^+}(x^2-4)\dfrac{1}{x^2+4x+4}=\lim\limits_{x\to-2^+}(x^2-4)\times\lim\limits_{x\to-2^+}\dfrac{1}{(x+2)^2}=0\times(+\infty)$ مبهم

(حل برای رفع ابهام) $=\lim\limits_{x\to-2^+}\dfrac{(x^2-4)}{(x+2)^2}=\dfrac{0}{0}$ مبهم

(برای رفع ابهام) $=\lim\limits_{x\to-2^+}\dfrac{(x-2)\cancel{(x+2)}}{(x+2)^{\cancel{2}}}=\lim\limits_{x\to-2^+}\dfrac{x-2}{x+2}=\dfrac{-4}{0^+}=-\infty$

پیوستگی ! تابع $y=f(x)$ (تابع f) را در نقطه $x=x_0$ پیوسته گوییم هرگاه:

۱) $f(x_0)$ موجود باشد (تعریف شده باشد)

۲) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ موجود باشد (دارای حد باشد)

۳) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

نکته ۱) : تابع f را در نقطه $x=x_0$ پیوسته از راست گوییم هرگاه:

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

نکته ۲) تابع f را در نقطه $x=x_0$ پیوسته از چپ گوییم هرگاه:

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

مثال) نشان دهید که تابع

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{|x|}{x} & , x\neq 0 \\ 0 & , x=0 \end{cases}$$

$x>0$
$x<0$

در نقطه $x=0$ پیوسته نیست.

حل)

۱) $f(0)=0$ ✓

۲) حد راست $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{|x|}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{x} = 1$

حد چپ $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{|x|}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-x}{x} = -1$

تابع حد ندارد
پس پیوسته نیست

ص ۴۷

سوال ۲: بررسی پیوستگی تابع $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x+2} & , x\neq -2 \\ -4 & , x=-2 \end{cases}$ در نقطه $x=-2$

حل)

1) $f(-2)=-4$ ✓

2) $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2-4}{x+2} = \dfrac{0}{0}$ مبهم

با رفع ابهام: $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{(x-2)\cancel{(x+2)}}{\cancel{(x+2)}} = -4$

3) $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = -4 = f(-2)$ ✓

پس تابع پیوسته است.

سوال ۳: مقادیر a و b را طوری تعیین نمایید که تابع زیر در $x=2$ پیوسته باشد.

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+2bx & , x<2 \\ 3 & , x=2 \\ -2ax-3b & , x>2 \end{cases}$$

حل)

1) $f(2)=3$

2) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} (-2ax-3b) = -4a-3b$ حد راست

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (ax^2+2bx) = 4a+4b$ حد چپ

3) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2) \longrightarrow \begin{cases} -4a-3b=3 \\ 4a+4b=3 \end{cases}$

$\boxed{b=6} \longrightarrow \boxed{a=-\dfrac{21}{4}}$

انواع ناپیوستگیها : الف) $\lim_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$ ناپیوستگی را رفع شدنی (برداشتنی) گویند.

ناپیوستگی رفع نشدنی (اساسی):

ب) حد چپ و حد راست عدد حقیقی ولی نابرابر باشند ناپیوستگی جهشی گویند

ج) " " یا هر دو نامتناهی گردد ناپیوستگی را نامتناهی گویند.

قضیه ۱ : هرگاه f و g دو تابع پیوسته در x_0 باشند آنگاه :

الف) $f \pm g$ در x_0 پیوسته است.

ب) $f \cdot g$ " " "

ج) $\frac{f}{g}$ " " " مشروط بر اینکه $g(x_0) \neq 0$.

قضیه ۲ : الف) هر تابع چندجمله‌ای در هر نقطه‌ای پیوسته است.

ب) هر تابع گویا (تابعی به صورت کسری که صورت و مخرج آن چندجمله‌ای باشد) در هر نقطه از دامنه‌اش پیوسته است.

ج) توابع $f(x) = \sin x$ و $f(x) = \cos x$ در هر نقطه از $\mathbb{R}$ پیوسته است.

د) تابع $f(x) = \sqrt[n]{x}$ (n عدد طبیعی زوج) در هر نقطه از فاصله $(0, +\infty)$ پیوسته است.

ه) " " " (n " " فرد) " " " $\mathbb{R}$ پیوسته است.

و) تابع نمایی $f(x) = a^x$ $(a \neq 1, a > 0)$ در هر نقطه $\mathbb{R}$ پیوسته است.

ز) تابع لگاریتمی $f(x) = \log_a x$ $(a \neq 1, a > 0)$ در هر نقطه $(0, +\infty)$ پیوسته است.

ح) هرگاه تابع g در x_0 پیوسته و تابع f در $g(x_0)$ پیوسته باشد آنگاه تابع مرکب $f \circ g$ در x_0 پیوسته است.

نکته ۱: تابع f را در فاصله (a,b) پیوسته گویند هرگاه در تمام نقاط این فاصله پیوسته باشد.

نکته ۲: تابع f را در فاصله $[a,b)$ پیوسته گویند هرگاه در فاصله (a,b) پیوسته و در $x=a$ پیوستگی راست داشته باشد.

نکته ۳: " " " " $(a,b]$ " " " " (a,b) " " $x=b$ پیوستگی چپ " ".

نکته ۴: تابع " " $[a,b]$ " " " " (a,b) " " و در $x=a$ پیوستگی راست و در $x=b$ پیوستگی چپ داشته باشد.

مثال) پیوستگی هر یک از توابع زیر را در بازه‌ها داده شده بررسی نمایید.

الف) $f(x)=\dfrac{3x^2+1}{5+\sin x}$ ، $x\in(-\infty,+\infty)$

حل) $\forall x\in\mathbb{R}:\ 5+\sin x\neq 0 \Rightarrow D_f=\mathbb{R}$

$$\forall a\in\mathbb{R}:\ \lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a}\frac{3x^2+1}{5+\sin x}=\frac{3a^2+1}{5+\sin a}=f(a)$$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$. پس f در $(-\infty,+\infty)$ پیوسته است.

ب) $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ ، $x\in[-2,2]$

حل) $4-x^2\geq 0 \rightarrow |x|\leq 2 \Rightarrow -2\leq x\leq 2 \rightarrow D_f=[-2,2]$

$$\forall a\in[-2,2]:\ \lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a}\sqrt{4-x^2}=\sqrt{4-a^2}=f(a)\Rightarrow \lim_{x\to a} f(x)=f(a)$$

پس f در $[-2,2]$ پیوسته است (البته f در $x=2$ از چپ و در $x=-2$ از راست پیوسته است).